

Helmut Herminghaus

EINE ERWEITERUNG DER LEITUNGSTHEORIE
AUF DEN WELLENLEITER EINES
WENDELLINEAR BESCHLEUNIGERS

Frankfurt am Main 1961

1962



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551911_0074

Eine Erweiterung der Leitungstheorie
auf den Wellenleiter eines
Wendellinearbeschleunigers

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der naturwissenschaftlichen Fakultät
der Johann-Wolfgang-Goethe Universität

vorgelegt von
Helmut Herminghaus
aus Wiesbaden

Frankfurt am Main

1 9 6 1



1. Gutachter: Prof. Dr. Hermann Dänzer
2. Gutachter: Priv. Doz. Dr. Heinz Lueg

Tag der mündlichen Prüfung: 23.1.1962

Tag der Promotion: 26.2.1962

Inhaltsverzeichnis.

Literaturverzeichnis	4
Einleitung	5
Leitungstheorie auf der Wendel.	
1.1. Ableitung der Gleichungen und Diskussion	8
1.2. Messung von γ und L und Vergleich mit der Theorie	27
Auswertung der Theorie, Vergleich mit dem Schichtmodell und Meßergebnissen.	
2.1. Phasengeschwindigkeit und Dispersion	33
2.1.1. Ableitung und Diskussion	33
2.1.2. Vergleich	36
2.2. Wellenwiderstand	40
2.2.1. Ableitung	40
2.2.2. Vergleich	42
2.3. Serienimpedanz	48
2.3.1. Ableitung	48
2.3.2. Vergleich	55
2.4. Dämpfung	55
Die für 2. verwendeten Meßverfahren	58
Vorbemerkungen	58
3.1. Messung der Phasengeschwindigkeit	58
3.2. Wellenwiderstand	59
3.2.1. Messung der durch eine aufgesetzte Kapazität verursachten Verstimmung von Wendelstücken	60
3.2.2. Der theoretische Zusammenhang zwischen der Verstimmung und dem Wellenwiderstand	63
3.3. Messung der Dämpfungslänge	68
Zusammenfassung	70
Lebenslauf des Verfassers	72

Literaturverzeichnis.

- [1] W. WALKINSHAW und K. WYLLIE, Math. Memo. 57 (1948)
- [2] K. JOHNSEN und H. DAHL, Chr. Michelsens, Inst. Beretn. 14 (1951)
- [3] W. MÜLLER und J. REMBSER, Überlegungen zum Bau eines Wendellinearbeschleunigers für Protonen, Nucl. Instr. 4, 202 (1959)
- [4] F. OLLENDORFF, Die Grundlagen der Hochfrequenztechnik, Springer-Verlag, Berlin 1926
- [5] S. SENSIPER, Electromagnetic Wave Propagation on Helical Structures, Proc. I.R.E. 43, 149 (1955)
- [6] J. R. PIERCE, Travelling Wave Tubes, D. von Nostrand Co., Toronto-New York-London 1950
- [7] H. KADEN, Eine allgemeine Theorie des Wendelleiters. A.E.Ü. 5, 534 (1951)
- [8] K. JOHNSEN, On the Theory of Linear Accelerators, Chr. Michelsens Inst. Beretn. 16 (1954)
- [9] K. JOHNSEN, Theoretical Losses in a Helix with Shield and Support, CERN-PS/KJ 17 August 1954
- [10] K. PÖSCHL, Wellenfortpflanzung längs einer Wendel mit zylindrischem Außenleiter. A.E.Ü. 7, 518 (1953)
- [11] G. PIEFKE, Theorie der Wendel-Leitung endlicher Drahtdicke mit Anwendung auf die Drehung der Polarisations-ebene von Hohlleiter-Wellen. A.E.Ü. 12, 309 (1958)
- [12] RIEMANN-WEBERS, Partielle Differentialgleichungen S. 385 ff.
- [13] CLEMENS SCHÄFER, Einführung in die theoretische Physik, Berlin und Leipzig 1929, Bd. 1, S. 715
- [14] H. KLEIN, Ein mit Elektronen betriebener Wendellinearbeschleuniger als Modell eines Protonenbeschleunigers, Dissertation Frankfurt/Main 1961.
- [15] SAMUEL P. MORGAN, Jr., Effect of Surface Roughness on Eddy Current Losses at Microwave Frequencies, Journal of Applied Physics 20, 352 (1949)

Einkleitung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit den hochfrequenztechnischen Problemen, die im Zusammenhang mit dem Wellenleiter eines Wendellinearbeschleunigers auftreten. Bei diesem Gerät handelt es sich darum, auf einer wendelförmigen Verzögerungsleitung laufende oder stehende Wellen zu erzeugen und schwere, geladene Teilchen (Protonen) längs der Wendelachse entweder als "Wellenreiter" auf der laufenden oder im Wechselfeld der stehenden Welle phasenrichtig zu beschleunigen [1], [2], [3].

Der erfolgreiche Bau eines solchen Beschleunigers erfordert die genaue Kenntnis der elektrischen Vorgänge auf der Wendel, wobei folgende Probleme im Vordergrund stehen:

Die Phasengeschwindigkeit der auf der Wendelachse laufenden Hochfrequenzwelle muß in Abhängigkeit von den geometrischen Parametern und der Frequenz genau bekannt sein, um die Phasengeschwindigkeit, die immer gleich der Teilchengeschwindigkeit sein muß, an jeder Stelle des Beschleunigers der dort vorhandenen Teilchengeschwindigkeit anpassen zu können.

Die beschleunigende Feldstärke hängt von der zugeführten elektrischen Leistung und den geometrischen Parametern der Wendel ab und bestimmt die Änderung der Steigungshöhe der Wendel in Abhängigkeit von der zurückgelegten Wegstrecke der Teilchen. Hierbei ist außerdem die Dämpfung der Hochfrequenz auf der Wendel von Einfluß, die ein Absinken des von der laufenden Welle mitgeführten Leistungsflusses längs der Wendel bewirkt. Die Verzahnung der einzelnen Bestimmungstücke erfordert also eine sehr genaue Analyse der physikalischen Zusammenhänge.

Zur Bewältigung der angedeuteten Aufgaben standen bisher im Wesentlichen das "Schichtmodell" nach OLLENDORFF [4] sowie die "Bandewendel" nach SENSIPER [5] zur Verfügung. Beim Schichtmodell wird die Wendel ersetzt durch einen Kreiszylinder verschwindender Wandstärke mit anisotroper Leitfähigkeit, wobei die Leitfähigkeit in Richtung des Steigungswinkels der realen

Wendel unendlich groß, in jeder anderen Richtung gleich Null angenommen wird. Dieses Modell ist u.a. von PIERCE [6], KADEN [7], JOHNSEN [8], [9], PÜSEHL [10], MÜLLER und REMBSER [3] und in einer verfeinerten Form von PIEFKE [11] zur Berechnung wendelförmiger Verzögerungsleitungen herangezogen worden.

Den Angaben in der Literatur zufolge liefert dieses Modell genügend genaue Ergebnisse, um damit die in Wanderwellenröhren verwendeten Verzögerungsleitungen berechnen zu können. Inzwischen hat sich jedoch herausgestellt, daß es für Wendeln, die für Wendellinearbeschleuniger in Betracht kommen, so ungenau ist, daß es als Konstruktionsbasis hierfür nicht ganz ausreicht, wie im Hinblick auf die sehr wesentlichen Vereinfachungen dieses Modells nicht anders zu erwarten. Auch ist die rechnerische Handhabung des Schichtmodells recht umständlich, so daß diese Theorie nicht in allen Teilen befriedigt.

In der vorliegenden Arbeit wurde versucht, eine für die praktischen Bedürfnisse geeignete Theorie des Wendelleiters auf Grund der Leitungstheorie zu entwickeln, bei der die allzu idealisierenden Annahmen des Schichtmodells vermieden sind. Im Gegensatz zum Schichtmodell wird deshalb in vorliegender Arbeit von aus dickem Draht gewickelten Wendeln ausgegangen, wie sie im Falle des Wellenleiters eines Wendellinearbeschleunigers hoher Strahlintensität aus Gründen der Kühlung erforderlich sind [3]. Die außerdem durchgeführten experimentellen Untersuchungen zeigen, daß die Theorie die Verhältnisse bei unseren eng gewickelten Wendeln und bei den in Betracht kommenden Frequenzen gut wiedergibt. Obwohl man zunächst erwarten sollte, daß die hier erfolgte Berücksichtigung der tatsächlichen Wendelgeometrie zu sehr unübersichtlichen Ergebnissen führt, stellte sich heraus, daß man mit ziemlich einfachen Überlegungen auskommt und daß die erhaltenen Ausdrücke wesentlich leichter zu handhaben sind als beim Schichtmodell. Außerdem erweist sich diese Theorie als sehr geeignet zur Erfassung des Einflusses gewisser Inhomogenitäten des Wendelleiters. Auch die Ein- und Auskopplung der Hochfrequenz an den Wendelenden kann in einigen Fällen mit ihrer Hilfe behandelt werden.

Ein erster Ansatz einer Leitungstheorie der Wendel wurde von H. DÄNZER in einem Bericht an die Deutsche Forschungsgemeinschaft im Rahmen einer von dieser betreuten Forschungsaufgabe des Instituts für angewandte Physik, Frankfurt/Main, angegeben. Die vorliegende Arbeit stellt eine Erweiterung dieses unveröffentlichten Berichts dar.

Das von SENSIPER [5] und anderen benutzte Modell einer bandförmigen Wendel verschwindender Dicke, aber beliebiger Breite des leitenden Bandes kommt der realen Wendel schon ziemlich nahe und liefert daher auch genauere Ergebnisse als das Schichtmodell, seine rechnerische Handhabung ist aber äußerst umständlich und - soweit bekannt - bisher nur näherungsweise durchgeführt.

Leitungstheorie auf der Wendel.

1.1. Ableitung der Gleichungen und Diskussion.

Wird eine Wendel von einem Wechselstrom J durchflossen, so bildet sich ein zeitlich periodischer magnetischer Kraftfluß ϕ aus, der die Wendel im Innern durchsetzt und dessen Kraftlinien sich über den Außenraum der Wendel schließen. Dieser Kraftfluß induziert in den Windungen der Wendel eine Spannung U , die ihrerseits über Verschiebungsströme eine örtliche Änderung des auf der Wendel fließenden Stromes bewirkt. Die Leitungstheorie verknüpft im Sinne einer quasistationären Elektrodynamik die zeitlichen und örtlichen Änderungen der beteiligten Größen mittels sogenannter "Leitungskonstanten", die einer stationären Betrachtungsweise entnommen werden.

Aus prinzipiellen Gründen werden im folgenden Flüsse und Ströme in elektromagnetischen Einheiten und die Spannung in elektrostatischen Einheiten gemessen. Daher tritt in den Gleichungen durchgehend die Lichtgeschwindigkeit c auf.

Beim Umlauf einer Windung der Wendel unter gleichzeitiger Fortschreitung in x -Richtung um die Wendelsteigung s (Abb. 1) kann die Spannungsänderung

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot s$$

als in der Windung induzierte Spannung aufgefaßt werden. Daher gilt

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{sc} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1)$$

Als weitere Leitungsgleichung formulieren wir die Kontinuitätsgleichung für die Ladungs- und Stromverteilung auf der Wendel.

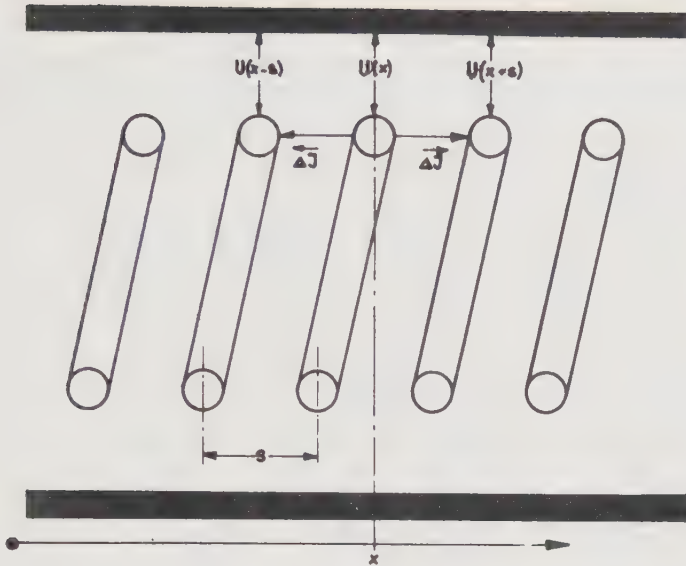


Abb. 1

Spannungen und Verschiebungsströme
bei der Wendel.

Der pro Windung zum Außenleiter fließende Verschiebungsstrom ΔJ_A ist gegeben durch

$$\Delta J_A = \frac{C}{c} \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (2)$$

wenn C die Kapazität zwischen einer Windung und dem Außenleiter ist. Bei der Wendel fließen nun außerdem noch Verschiebungsströme zu den übrigen Teilen der Wendel und wenn, wie hier vorausgesetzt, die Wendel aus dickem Draht mit geringem lichte Abstand gewickelt ist, so wird dieser Anteil der Verschiebungsströme im wesentlichen aus solchen bestehen, die zu den unmittelbar benachbarten Windungen fließen. Sei nun K die Kapazität zwischen je zwei benachbarten Windungen, so liest man aus Abb. 1 die Beziehungen ab

$$\Delta \vec{J} = \frac{K_s}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{U(x) - U(x+s)}{s},$$

$$\Delta \vec{J} = \frac{K_s}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{U(x) - U(x-s)}{s}.$$

Hierbei bezeichnet $\Delta \vec{J}$ den nach der rechten, $\Delta \vec{J}$ den nach der linken Windung abzweigenden Verschiebungsstrom. Ist nun die Wellenlänge auf der Wendel genügend groß gegen den Windungsabstand, um die Differenzenquotienten näherungsweise durch Differentialquotienten ersetzen zu können, so ergibt sich für die Summe dieser Anteile

$$\Delta \vec{J} + \Delta \vec{J} = - \frac{Ks^2}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right).$$

Zusammen mit (2) liefert dies den insgesamt von einer Windung abzweigenden Verschiebungsstrom, der zu Lasten des Leitungsstromes geht. Man erhält mithin für den Leitungsstrom die Beziehung:

$$\frac{\partial J}{\partial x} = - \frac{1}{sc} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(Cu - Ks^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right). \quad (3)$$

Diese Kontinuitätsgleichung ist bereits von F. NOETHER [12] für die Wendel angegeben worden.

In der Sommerfeld'schen Betrachtungsweise tritt zu den bisher gebrauchten Gleichungen noch eine Kopplung in der Form

$$\phi = LJ. \quad (4)$$

Diese Beziehung gilt aber nur streng bei Gleichströmen in einer langen Spule. Es ist der wesentliche Gedanke der weiteren Ausführungen, diese Beziehung zu einer dem Problem besser angepaßten Form abzuändern.

Um in einfacher Weise zu der verbesserten Verknüpfung zu kommen, nehmen wir der Einfachheit halber für den Augenblick an, daß der Wendeldraht einen rechteckförmigen Querschnitt hat (Abb. 2).

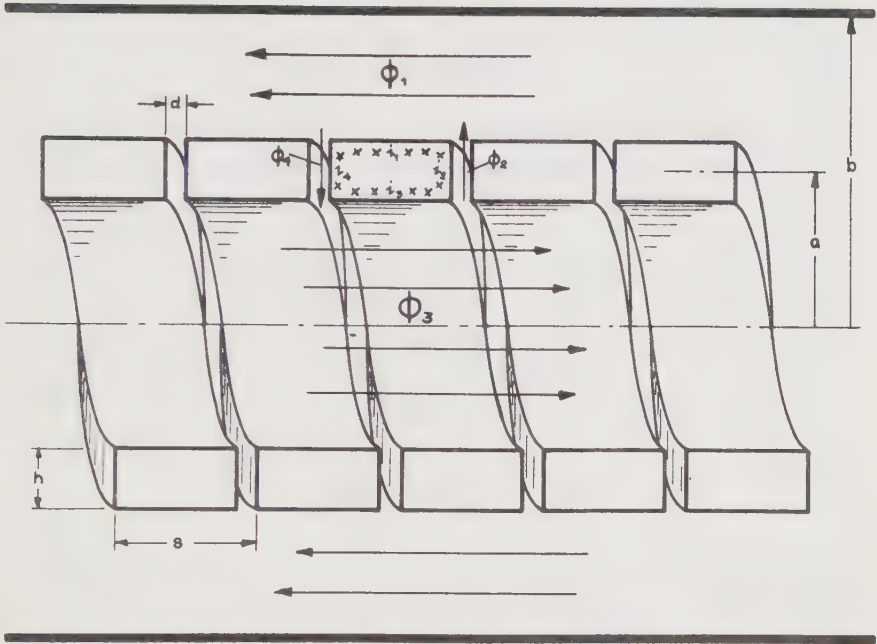


Abb. 2

Zur Strom- und Flußverteilung bei
rechteckförmigem Drahtquerschnitt

Die Breite des Wendeldrahtes sei so groß gegenüber dem lichten Anstand d zweier Drähte, daß man sie näherungsweise durch den Windungsabstand s ersetzen darf. Bei den in Betracht kommenden Frequenzen von der Größenordnung 100 MHz liegt nun ein sehr ausgeprägter Skineneffekt vor. Dies bedeutet, daß die Normalkomponente des magnetischen Feldes an allen Leiteroberflächen verschwindet und daß eine feste Beziehung zwischen der Dichte j des Flächenstromes auf der Leiteroberfläche und der darüber herrschenden tangentiellen magnetischen Feldstärke H besteht gemäß

$$H = 4\pi j$$

(5)

Hiermit läßt sich eine Beziehung zwischen dem die Wendel durchsetzenden magnetischen Fluß und den auf den vier Rechteckseiten des Wendeldrahtes fließenden Flächenströmen herleiten, deren Summe dann gleich dem über den Draht fließenden Gesamtstrom J ist. Wir nehmen näherungsweise an, daß der Fluß im Innen- und Außenraum der Wendel homogen über den Querschnitt verteilt ist. In dem engen Zwischenraum zwischen den Windungen ist dies ohnedies erfüllt. Dann gilt mit den Bezeichnungen der Abb. 2

$$\begin{aligned} J_1 &= i_1 s = \frac{s}{4\pi} \phi_1 \frac{1}{\pi(b^2 - a^2)} \\ J_2 &= i_2 h = \frac{h}{4\pi} \phi_2 \frac{1}{d \cdot 2\pi a} \\ J_3 &= i_3 s = \frac{s}{4\pi} \phi_3 \frac{1}{\pi a^2} \\ J_4 &= i_4 s = \frac{h}{4\pi} \phi_4 \frac{1}{d \cdot 2\pi a} \end{aligned} \quad (6)$$

Da die magnetischen Flußlinien in sich geschlossen sein müssen, gilt stets

$$\phi_1 = \phi_3 = \phi. \quad (7)$$

(Die Vorzeichen werden so festgesetzt, daß die Flüsse in den in Abb. 2 gezeichneten Richtungen positiv gezählt werden. Nach der Rechtsschraubenregel tritt dann der mit ihnen gekoppelte Strom nach oben aus der Zeichenebene heraus.) Wegen der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes müssen die zwischen den Windungen hindurchtretenden Flüsse ϕ_2 und ϕ_4 eine entsprechende Verminderung von ϕ_3 zur Folge haben:

$$\left. \begin{aligned} s \cdot \frac{\phi_3(x) - \phi_3(x-s)}{s} &= \phi_4 \\ s \cdot \frac{\phi_3(x+s) - \phi_3(x)}{s} &= -\phi_2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Unter den gleichen Voraussetzungen, wie sie bei der Ableitung der Kontinuitätsgleichung getroffen wurden, ergibt sich hieraus:

$$\phi_2 + \phi_4 = -s^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}. \quad (9)$$

Summiert man nun über die einzelnen Stromanteile (9), so erhält man unter Benutzung von (7) und (9)

$$J = \sum_{i=1}^4 J_v = \frac{1}{(2\pi a)^2} \left[\frac{s}{1 - \frac{a^2}{b^2}} \phi - \frac{2\pi a h}{4\pi d} \cdot s^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]. \quad (10)$$

Man erkennt in dem Koeffizienten $\frac{2\pi a h}{4\pi d}$ die Kapazität K zwischen je zwei Windungen der Wendel nach Abb. 2. Mit der Abkürzung

$$\frac{s}{1 - \frac{a^2}{b^2}} \equiv D \quad (11)$$

schreibt sich dann (10):

$$J = \frac{1}{(2\pi a)^2} \left[D \phi - K s^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]. \quad (12)$$

Gleichung (12) steht in auffälliger Analogie zu der Kontinuitätsgleichung (3). In beiden Gleichungen tritt die Windungskapazität als wesentliches Bestimmungsstück im Zusammenhang mit einer zweiten örtlichen Ableitung auf. Die Unsymmetrie, die in den Gleichungen (4) und (3) zutage tritt, entstammt also einer fehlerhaften Auffassung: Für den Fall, daß die Windungskapazität nicht vernachlässigt werden kann, muß diese in beiden Zusammenhängen berücksichtigt werden.

Bevor wir im Gang der Rechnung fortfahren, wollen wir die neu gewonnene Verknüpfung (12) näher diskutieren. Zunächst sei festgestellt, daß ihre Gültigkeit nicht auf den hier der Einfachheit halber angenommenen Fall rechteckigen Drahtquerschnitts beschränkt ist. Vielmehr tritt die Windungskapazität K auch bei allgemeinen Querschnittsformen in (12) auf, sofern man die

magnetischen Kraftlinien als Orthogonaltrajektorien der elektrischen betrachten kann. Unter Berücksichtigung des Skin-effekts ist dies näherungsweise dann der Fall, wenn der Drahtdurchmesser genügend klein gegen den Wendeldurchmesser ist. Die Verteilung der Stromdichte auf dem Draht entspricht dann genau der Ladungsdichteverteilung im elektrostatischen Fall. Im Falle der Konstanten D sind die Verhältnisse weniger leicht zu übersehen. Immerhin erkennt man aus einem Vergleich der nachstehenden Figuren in Abb. 3, daß bei einem beispielsweise kreisförmigen Querschnitt die tangentielle magnetische Feldstärke zwar nicht auf der ganzen Oberseite des Drahtes voll zur Wirkung kommt, dafür aber auf einen gewissen Bereich stärker zusammengedrängt wird. Dort ist also dafür die Stromdichte höher, so daß in erster Näherung die Beibehaltung von D gemäß (11) auch bei allgemeineren Drahtquerschnitten gerechtfertigt erscheint.

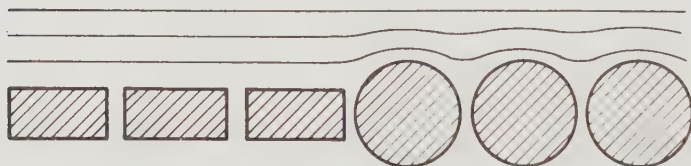


Abb. 3

Vergleich der Flußdichteverteilung bei rechteckigem und kreisförmigem Drahtquerschnitt.

Wir werden die Gleichung (12) im Folgenden also auch für den uns speziell interessierenden kreisförmigen Querschnitt ungeändert beibehalten.

Es sei ferner darauf hingewiesen, daß bei der Ableitung von (12) keine speziellen Annahmen über die Herkunft des magnetischen Flusses gemacht wurden. Dieser kann vielmehr sowohl von der in Abb. 2 betrachteten Windung selbst stammen als auch von Strömen auf anderen Windungen. Er kann sogar von einem

der Wendelenden her fremd eingespeist sein, wobei allerdings in diesem Falle darauf zu achten ist, daß die gemachten Voraussetzungen über die annähernde Homogenität der Flußdichte und das Zurücklaufen des Flusses im Außenraum der Wendel innerhalb des Außenleiters nicht verletzt werden. (Dies ist beispielsweise dann der Fall, wenn die den eingespeisten Fluß liefernde Spule selbst eine Wendel mit gleichen geometrischen Parametern ist, die mit der gespeisten auf einer Achse sitzt und unmittelbar an diese anschließt).

Einen einfachen Spezialfall erhält man, wenn man J identisch gleich 0 setzt. Experimentell kann man sich dies dadurch verwirklicht denken, daß man die Wendel genügend oft, z.B. nach jeder Windung, unterbricht. Da dann kein resultierender Gesamtstrom existieren kann, müssen die einzelnen Strömbelegungen aus (6) in diesem Falle so beschaffen sein, daß sie sich bei der Summation gegenseitig aufheben: sie sind reine Wirbelströme, die nur dafür sorgen, daß das magnetische Feld nicht in den Leiter eindringt. Für diesen Fall liefert (12):

$$\phi = \phi_0 \cdot e^{-\gamma x}, \quad (13)$$

wobei

$$\gamma = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{D}{K}} \quad \text{gesetzt ist.} \quad (14)$$

Der magnetische Fluß fällt mithin beim Eindringen in die geschlitzte, eng gewickelte Wendel exponentiell ab. Diese Gesetzmäßigkeit, die eine Folge der Feldverdrängung aus dem dicken Wendeldraht ist, konnte experimentell gut bestätigt werden^{*)}. Der Anschaulichkeit halber ist ein solcher Fall in Abb. 4 dargestellt. Hierbei sind für D und K solche Werte angenommen, daß der Strom auf der rechten Seite des Querschnitts

*) Die entsprechenden Messungen werden weiter unten in 1.2. beschrieben.

einer Windung jeweils doppelt so groß ist wie auf der Ober- und Unterseite zusammengekommen. Der Strom auf der linken Seite muß dann wegen des Verschwindens des Gesamtstromes zwangsläufig in entgegengesetzter Richtung fließen und dem Betrage nach einsechsmal so stark sein wie auf der rechten Seite. Die zugehörigen Flüsse müssen sich dann ebenso verhalten. Weiterhin müssen auf den einander zugewandten Seiten zweier Windungen entgegengesetzt gleiche Ströme fließen. Man erkennt aus Abb. 4, daß der zwischen zwei Windungen hindurchtretende Fluß

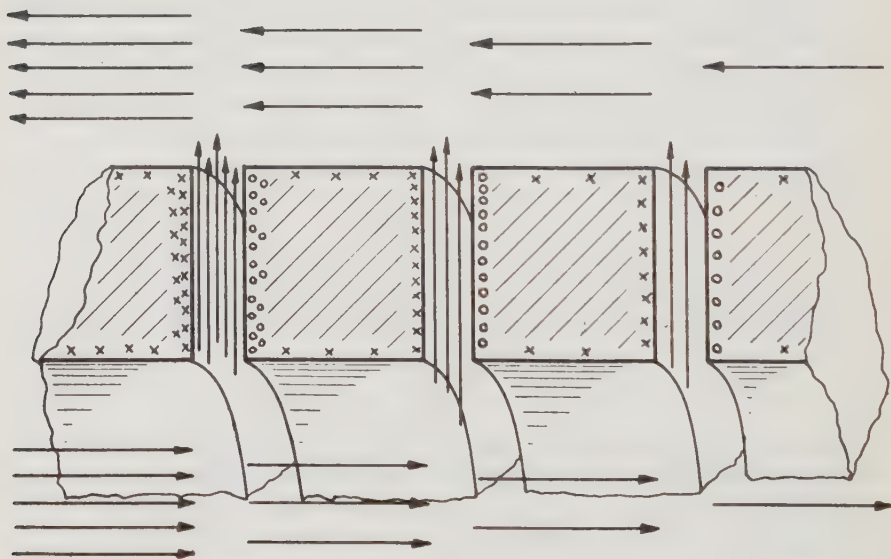


Abb. 4

Die Stromverteilung über den Drahtquerschnitt für $J = 0$. Aus der Zeichenebene hervortretende Stromfäden sind mit x bezeichnet, hineinweisende mit o .

in diesem Falle zwangsläufig immer in gleicher Richtung fließen und außerdem von Windung zu Windung monoton abfallen muß. Daß dieser Abfall exponentiell verläuft, läßt sich ebenfalls aus Abb. 4 plausibel machen: Der Verlauf des Flusses ist wegen der ausgedehnten Metallmassen im wesentlichen durch diese bestimmt; seine "Vorgeschichte" wird in Anbetracht der starken Einengung seines Verlaufs unwesentlich. Für ihn herrschen daher beim Eintritt in die $n+1$ -te Windung im wesentlichen die gleichen Verhältnisse, wie sie beim Eintritt in die n -te Windung vorlagen - mit dem einzigen Unterschied, daß er nun um den zwischen den beiden Windungen in den Außenraum entwichenen Anteil geschwächt ist. Da dieser Anteil unter den herrschenden Voraussetzungen im wesentlichen dem Fluß selbst proportional ist, ergibt sich so ein Abfall des Flusses von Windung zu Windung um jeweils einen konstanten Faktor, was unmittelbar zum Exponentialgesetz führt.

Weitere Einsichten gewinnt man, wenn man die Differentialgleichung (12) mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten löst. Man erhält

$$\phi(x) = \frac{(2\pi\omega)^2}{2s\sqrt{KD}} \int_0^l e^{-\gamma(l-\xi)} J(\xi) d\xi + h_1 e^{-\gamma x} + h_2 e^{+\gamma x} \quad (15)$$

Diese Beziehung ist offenbar eine quellenmäßige Darstellung des Flusses. Das Integral summiert über die Länge l der Wendel die Teilflüsse auf, die jeweils von der Stelle ξ entspringen und von denen nur ein exponentiell abgeklungener Bruchteil die an der Stelle x befindliche Windung durchsetzt. Hierzu treten noch die beiden Lösungen der homogenen Differentialgleichung, die, wie der Fall $J(\xi) \equiv 0$ lehrt, offenbar die evtl. von den beiden Wendelenden her fremd eingespeisten Flüsse darstellen. Es ist ungewohnt, daß hier die von außen aufgeprägte Erregung, die üblicherweise die Ursache der Inhomogenität einer Differentialgleichung ist, hier im Gegenteil gerade durch die **h o m o g e n e** Differentialgleichung dargestellt wird. Dies leuchtet aber ein, wenn man wieder die ausgedehnten Metallmassen bedenkt,

deren Wirkung ja gerade durch (12) beschrieben wird: Durch die Wirkung dieser Metallmassen kann ein von außen eingespeister Fluß - solange er die weiter oben gemachten Voraussetzungen nicht verletzt - gar nicht anders abfallen als nach Maßgabe der Differentialgleichung. Anders ausgedrückt: Die Metallmassen formen den Fluß so, daß er auf die Differentialgleichung paßt. Dieser Sachverhalt ist eigentlich selbstverständlich, wenn man die Art der Herleitung von (12) beachtet. Für einige Anwendungen der hier entwickelten Theorie ist er aber so wesentlich, daß seine Diskussion gerechtfertigt erscheint. Hierdurch wird es nämlich trotz der verwickelten Wechselwirkung zwischen den Windungen möglich, gewisse Leitungsinhomogenitäten, die eine Änderung des Flußverlaufs zur Folge haben und mit gewissen Einschränkungen auch Fragen der induktiven Ein- und Auskopplung von Hochfrequenzenergie an den Wendelenden zwanglos im Rahmen dieser Theorie zu behandeln. Hierauf wird weiter unten noch näher eingegangen werden.

Unter Beachtung des quellenmäßigen Charakters des Integrals in (15) kann man sich Überlegen, daß der Koeffizient vor dem Integral nichts anderes sein kann als die Induktivität L einer einzelnen Windung, dividiert durch den Windungsabstand. Demnach ist L hier gegeben durch

$$L = \frac{(2\pi a)^2}{2\sqrt{KD}} \quad (16)$$

In dem Faktor $\sqrt{KD}$ im Nenner drückt sich der Einfluß der benachbarten Metallmassen aus, durch deren feldverdrängende Wirkung die Induktivität verkleinert wird. Läßt man den Außenleiter-radius gegen unendlich gehen, so geht D gemäß (11) gegen s , so daß man für L einen endlichen Grenzwert erhält. Vergrößert man aber den Windungsabstand, so verschwindet K im Grenzfall und L würde gemäß (16) über alle Grenzen wachsen. (Man muß hierbei beachten, daß das s im Zähler von D eigentlich nicht der Windungsabstand, sondern eine "effektive Windungsbreite" ist, die mit steigendem Windungsabstand natürlich gegen einen endlichen Grenzwert geht). Dies zeigt, wie wesentlich im Rahmen dieser Theorie die hier stets gemachte Voraussetzung enger Wicklung ist.

Wir wenden uns nun der Lösung der Gleichungen (1), (3) und (12) zu, die der besseren Übersicht wegen hier noch einmal zusammengestellt seien:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{sc} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = -\frac{1}{sc} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[Cu - Ks^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right], \quad (18)$$

$$\gamma = \frac{1}{(2\pi a)^2} \left[D\phi - Ks^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]. \quad (19)$$

Zur Lösung dieses Systems von Differentialgleichungen führen wir zweckmäßigerweise das "Geschwindigkeitspotential" ϕ ein, dessen Verwendung in der Akustik üblich ist und gewisse darstellungstechnische Vorteile bietet. Im Anschluß an das Induktionsgesetz (1) definieren wir ϕ durch

$$\phi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (20)$$

$$u = \frac{1}{sc} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (21)$$

(17) ist damit befriedigt. Trägt man die Ansätze (20) und (21) in (18) und (19) ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = -\frac{1}{s^2 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(C\varphi - Ks^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right), \quad (22)$$

$$\gamma = -\frac{1}{(2\pi a)^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(D\varphi - Ks^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right). \quad (23)$$

Aufgrund von (22) und (23) erhalten wir für das Geschwindigkeitspotential die Differentialgleichung 4. Ordnung:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(C\varphi - Ks^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = \frac{s^2 c^2}{(2\pi a)^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D\varphi - Ks^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right). \quad (24)$$

Die Lösung des Gesamtproblems ist damit vorgezeichnet.

Unter Berücksichtigung der Voraussetzung enger Wicklung ist der Faktor $\frac{s^2 c^2}{(2\pi a)^2}$ das Quadrat derjenigen Phasengeschwindigkeit, die die Welle auf der Wendel hätte, wenn sie mit Lichtgeschwindigkeit längs des Wendeldrahtes lief. Wir nennen diese Geschwindigkeit v_p' und setzen unter Einführung einer weiteren Größe k' :

$$\frac{s^2 c^2}{(2\pi a)^2} = v_p'^2 = \frac{c^2}{k'^2} \quad (25)$$

Die Lösungen von (24) nehmen eine besonders einfache Gestalt an, wenn man den Spezialfall eng anliegenden Außenleiters betrachtet. In diesem Falle kann man die magnetische Flußdichte im Innenraum der Wendel gegen die zwischen Wendel und Außenleiter herrschende vernachlässigen. Da dann ferner der Abstand zwischen Wendel und Außenleiter klein ist gegen den Wendelradius, kann man die dort herrschenden Felder näherungsweise als eben betrachten und die magnetischen Feldlinien gehen in die Orthogonaltrajektorien der elektrischen über. Damit wird im Grenzfall^{*)}

$$D = C$$

*) Setzt man für C die Kapazität eines Zylinderkondensators der Länge s, so wird mit $(b-a) = a$:

$$\lim_{a \rightarrow b} C = \lim_{a \rightarrow b} \frac{s}{2 \ln \frac{b}{a}} = \frac{as}{2c};$$

und für D erhält man gleichfalls

$$\lim_{a \rightarrow b} D = \lim_{a \rightarrow b} \frac{s}{1 - \frac{a}{b}} = \frac{as}{2c}.$$

und (24) geht über in

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(C\varphi - \kappa s^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = v_p'^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(C\varphi - \kappa s^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right).$$

Dies ist die Wellengleichung für den in der Klammer stehenden Ausdruck, die bekanntlich auf Wellen mit der Phasengeschwindigkeit v_p' führt:

$$\varphi = a_2 e^{-jk'x} + a_4 e^{+jk'x}$$

Gemäß (25) läuft die Welle also in diesem Falle mit Lichtgeschwindigkeit den Wendeldraht entlang. Ein weiteres Lösungspaar erhält man, wenn man den Klammerausdruck identisch gleich Null setzt. Diese normalerweise triviale Lösung der Wellengleichung liefert hier:

$$\varphi = a_1 e^{-\gamma x} + a_3 e^{+\gamma x}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß diese vier Lösungen auch den Verlauf von U und ϕ darstellen, während für den Strom J nur das erste Lösungspaar zutrifft, da das identische Verschwinden der Klammer gemäß (22) und (23) auf $J = 0$ führt.

Um (24) für den allgemeinen Fall zu lösen, führen wir die Zeitabhängigkeit gemäß $e^{j\omega t}$ ein. Hiermit geht (24) unter Beachtung von (25) über in

$$\varphi^{(4)} + (k'^2 - \gamma^2) \varphi'' - \frac{C}{D} k'^2 \gamma^2 \varphi = 0, \quad (26)$$

wobei wieder wie früher

$$\frac{1}{s} \sqrt{\frac{D}{K}} \equiv \gamma$$

gesetzt ist.

Wie man aus (20) ... (23) ersieht, gilt die gleiche Differentialgleichung auch für ϕ , U und J . Für diese Größen gilt demnach nun nicht mehr die gewohnte Wellengleichung, sondern eine Differentialgleichung 4. Ordnung. Diese geht für $(k'^2 - \gamma^2) = 0$, d.h. für eine bestimmte Frequenz, über in die Differentialgleichung für die Biegeschwingungen des elastischen Stabes [13].

Wir lösen (26) durch den Ansatz $\varphi = \sum_{\nu=1}^4 a_{\nu} e^{\lambda_{\nu} x}$ und erhalten für die λ_{ν} :

$$\lambda_{1, \dots, 4} = \pm \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \sqrt{\pm (1 + \varepsilon'^2) \sqrt{1 + 4\varepsilon'^2 \frac{\frac{c}{D} - 1}{(1 + \varepsilon'^2)^2}} + (1 + \varepsilon'^2)}.$$

Wie man sieht, sind zwei der λ_{ν} reell und zwei imaginär. Die reellen λ_{ν} nehmen für $\varepsilon' = 0$ (d.h. für verschwindende Frequenz) den Wert $\pm \gamma$ an, während die imaginären λ_{ν} mit $\varepsilon' \rightarrow 0$ ebenfalls gegen Null gehen und offenbar die Wellenzahlen $\pm k$ der hin- bzw. rücklaufenden Welle darstellen:

$$\lambda_{1,3} = \pm \gamma \sqrt{1 - q(\varepsilon'^2 + 1)}$$

$$\lambda_{2,4} = \pm j\gamma \sqrt{\varepsilon'^2 - q(\varepsilon'^2 + 1)},$$

wobei zur Abkürzung

$$\sqrt{1 - 4\varepsilon'^2 \frac{1 - \frac{c}{D}}{(1 + \varepsilon'^2)^2}} = 1 - 2q \quad (27)$$

gesetzt ist.

Setzen wir $\lambda_{2,4} = \pm jk$ und beschreiben wir die Abweichung von $\lambda_{1,3}$ von dem Wert $\pm \gamma$ durch einen Faktor δ , so wird

$$\left. \begin{aligned} k &= \gamma \sqrt{\varepsilon'^2 - q(\varepsilon'^2 + 1)}, \\ \text{bzw. mit der Abkürzung } \varepsilon &= \frac{\delta}{\gamma} \\ \varepsilon &= \sqrt{\varepsilon'^2 - q(\varepsilon'^2 + 1)} \\ \text{sowie} \\ \delta &= \sqrt{1 - q(\varepsilon'^2 + 1)}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Damit schreibt sich die Lösung von (26) in der Gestalt:

$$\varphi = a_1 e^{-\delta \gamma x} + a_2 e^{-jkx} + a_3 e^{+\delta \gamma x} + a_4 e^{+jkx}. \quad (29)$$

Hierbei sind die a_r beliebig komplex und alle 4 Terme mit dem Zeitfaktor $e^{j\omega t}$ multipliziert zu denken. Der 2. und 4. Term stellen die gewohnten hin- und rücklaufenden Wellen dar, während durch den 1. und 3. Term die Randstörungen beschrieben werden, die am linken bzw. rechten Wendelende auftreten und beim Eindringen ins Wendelinnere rasch abklingen (Abb. 5).

Im bereits besprochenen Fall eng anliegenden Außenleiters verschwindet q gemäß (27) wegen $C = D$ und man erhält aus (28) wieder $k = \gamma \varepsilon' = k'$. Im Allgemeinen ist aber $C \neq D$, mithin $q \neq 0$ eine Funktion der Frequenz. k ist dann also nicht mehr der Frequenz proportional, sondern es tritt eine Dispersion auf, die weiter unten eingehender diskutiert werden wird.

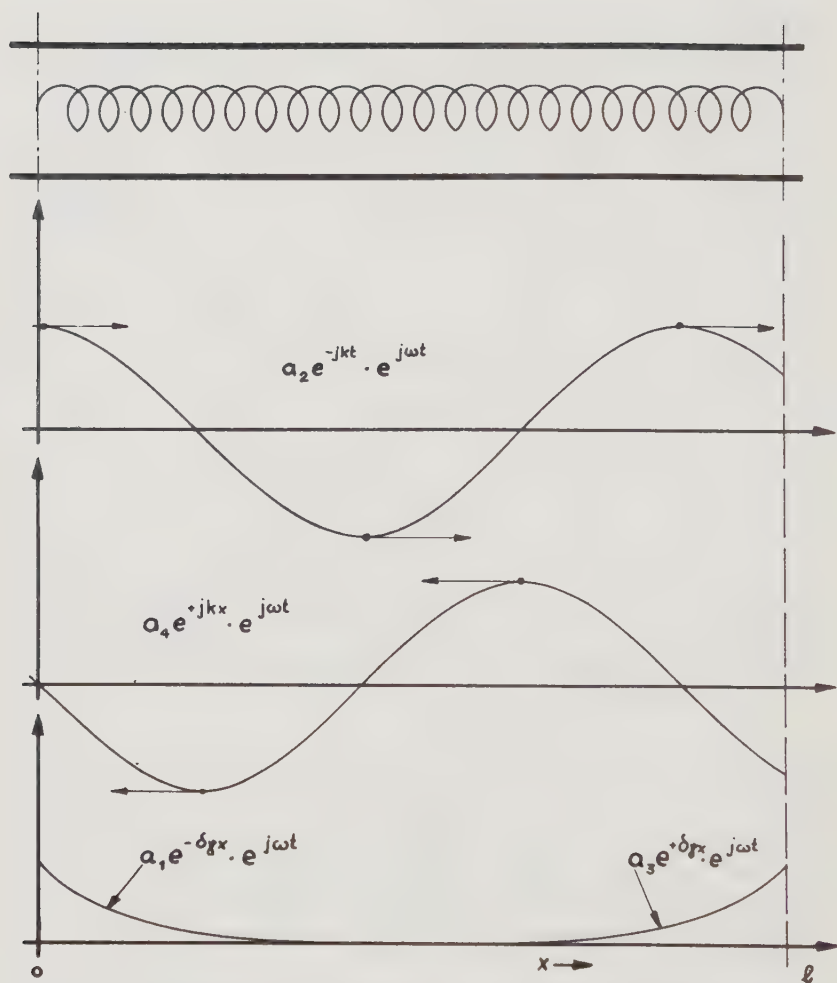


Abb. 5

Schematische Darstellung der einzelnen Komponenten von φ gemäß (29).

Wir benötigen nun noch die Bestimmungsgleichungen, mit deren Hilfe die a_ν in (29) aus gegebenen Randbedingungen berechnet werden können. Da diese Randbedingungen die Größen U , J , ϕ und den evtl. fremd eingespeisten Fluß ϕ_0 betreffen, müssen wir zunächst die Lösungen von (26) für diese Größen aufsuchen.

Hierbei wollen wir uns von vornherein auf den Fall beschränken, daß die Länge l der Wendel stets so lang ist, daß sich die gestörten Randzonen nicht überschneiden. Man kann dann jedes Wendelende für sich behandeln und wir wollen - sofern überhaupt ein Wendelende im Endlichen angenommen wird - das Koordinatensystem stets so wählen, daß sich die Wendel von $x = 0$ an in Richtung positiver x erstreckt. Wir können somit im folgenden den dritten Term von (29) streichen und erhalten zunächst für J durch Einsetzen von (29) in (23):

$$J = \frac{\gamma D}{(2\pi a)^2} \left[\delta(1-\delta^2) a_1 e^{-\delta \gamma x} + j\epsilon(1+\epsilon^2) (a_2 e^{-j k x} - a_4 e^{+j k x}) \right] \quad (30)$$

Durch Einsetzen von (29) in (21) bzw. (20) erhalten wir für U bzw. ϕ :

$$U = j \frac{k_0}{s} \left[a_1 e^{-\delta \gamma x} + a_2 e^{-j k x} + a_4 e^{+j k x} \right] ; \quad (31)$$

$$\phi = \gamma \left[\delta a_1 e^{-\delta \gamma x} + j\epsilon (a_2 e^{-j k x} - a_4 e^{+j k x}) \right] . \quad (32)$$

Hierbei ist, um die hier und im folgenden benutzten Bezeichnungen zusammenzustellen:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= +\sqrt{1 - q(\epsilon'^2 + 1)} ; & \epsilon &= +\sqrt{\epsilon'^2 - q(\epsilon'^2 + 1)} \\ k &= +\gamma \sqrt{\epsilon'^2 - q(\epsilon'^2 + 1)} ; & q &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4\epsilon'^2 \frac{1 - \frac{c}{D}}{(1 + \epsilon'^2)^2}}}{2} \\ \epsilon' &= \frac{k'}{\gamma} = k_0 \frac{2\pi a}{\gamma s} ; & \gamma &= \frac{1}{s} \sqrt{\frac{D}{K}} ; & \epsilon &= \frac{k}{r} ; & k_0 &= \frac{\omega}{c} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Zur Bestimmung der a_v aus den Randbedingungen ($x=0$) erhalten wir mithin die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \delta (1 - \delta^2) + (a_2 - a_4) \cdot j \varepsilon (1 + \varepsilon^2) &= \frac{(2\pi a)^2}{\gamma^2 D} j(0) \\ a_1 + a_2 + a_4 &= -j \frac{a}{k_0} U(0) \\ a_1 \delta + (a_2 - a_4) j \varepsilon &= \frac{1}{\gamma} \phi(0) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Für viele Fälle reichen diese Beziehungen zur Bestimmung der a_v aus. Indessen ist bei einigen Fragestellungen, z.B. bei der Behandlung der induktiven Einkopplung, nicht $\phi(0)$, also der gesamte bei $x = 0$ vorhandene Fluß, gegeben, sondern statt dessen der in das Wendelende fremd eingespeiste Fluß an der Stelle $x = 0$, den wir mit ϕ_0 bezeichnen wollen. Wie bereits weiter oben bemerkt, ist das Verhalten dieses Flußanteils unter gewissen einschränkenden Bedingungen nach (15) bereits dahingehend festgelegt, daß er mit wachsenden x gemäß $e^{-\gamma x}$ abnimmt. Dies versetzt uns in die Lage, eine einfache Beziehung zwischen ϕ_0 und den a_v herzuleiten. Aus (15) erhalten wir mit $b_1 \equiv \phi_0$ unter Beachtung von (16), wenn wir das rechte Wendelende als unendlich fern annehmen und das Integral zweckentsprechend aufspalten:

$$\phi(x) = \frac{L}{S} \left[e^{-\gamma x} \int_0^x e^{\gamma \xi} j(\xi) d\xi + e^{+\gamma x} \int_x^\infty e^{-\gamma \xi} j(\xi) d\xi \right] + \phi_0 e^{-\gamma x}.$$

Indem wir dies einmal nach x differenzieren, erhalten wir:

$$\frac{1}{\gamma} \phi'(x) = \frac{L}{S} \left[-e^{-\gamma x} \int_0^x e^{\gamma \xi} j(\xi) d\xi + e^{+\gamma x} \int_x^\infty e^{-\gamma \xi} j(\xi) d\xi \right] - \phi_0 e^{-\gamma x}.$$

Lassen wir nun in beiden Gleichungen $x \rightarrow 0$ gehen und subtrahieren die untere von der oberen, so folgt:

$$\phi(0) - \frac{1}{r} \phi'(0) = 2\phi_0$$

und mit (32)

$$\delta(1+\delta)a_1 - \varepsilon(\varepsilon-j)a_2 + \varepsilon(\varepsilon-j)a_4 = \frac{2\phi_0}{r} \quad (35)$$

Diese Beziehung tritt also gegebenenfalls an die Stelle der letzten der Gleichungen (34). Man muß jedoch bei der Anwendung der Gleichungen (34) und (35) stets darauf achten, daß die Voraussetzungen für die Gültigkeit der Ausgangsgleichungen (1), (3) und (12) an der Stelle $x = 0$ wegen der dort evtl. herrschenden besonderen geometrischen Verhältnisse nicht gestört sind (vergl. z.B. die Bemerkung auf S. 15).

Hiermit ist die Theorie so weit entwickelt, daß sich spezielle Fragestellungen mit Hilfe der Gleichungen (30) ... (35) schematisch behandeln lassen und wir werden dies im folgenden jeweils im Zusammenhang mit den untersuchten Fällen durchführen. Lediglich das sehr spezielle Problem der Dämpfung auf der Wendel erfordert noch einen gewissen Rechenaufwand außerhalb des Schemas.

1.2. Messung von γ und L und Vergleich mit der Theorie.

Wir wollen hier noch die experimentelle Bestimmung der Größe γ anschließen, die im Rahmen dieser Theorie eine sehr wesentliche Rolle spielt (vergl. (13) und (15)). Die hierzu zusammengestellte Apparatur gestattet ohne zusätzlichen Aufwand auch die Messung der Induktivität L einer einzelnen Windung, (16), weshalb diese Größe ebenfalls bestimmt wurde.

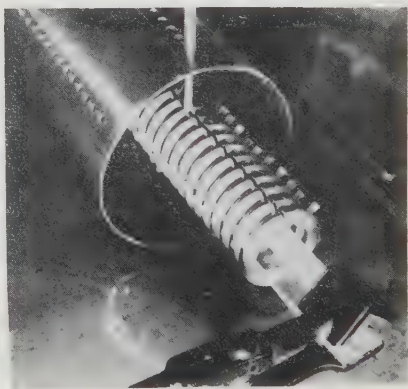
Nach den Ausführungen auf Seite 15 ff. ergibt sich folgender Sachverhalt: Ersetzt man die Wendel durch eine Folge von diskreten, an mindestens einer Stelle unterbrochenen Ringen, und speist man einen dieser Ringe mit Wechselstrom genügend hoher

Frequenz (Skinneffekt!), so fällt der von dem Stromfluß erzeugte magnetische Fluß zu beiden Seiten dieses Ringes mit wachsender Entfernung exponentiell gemäß $e^{-\gamma x}$ ab, wobei γ gegeben ist durch $\gamma = \frac{1}{\delta} \sqrt{D/k}$.

Zum experimentellen Nachweis dieses Effekts wurde auf ein T-förmiges Profil aus Trolitul eine Anzahl von Kupferringen stramm aufgeschoben und in einem gegenseitigen Abstand von je 2 mm durch zwischengelegte Trolitulklötzchen fixiert. Die Kupferringe waren aus 8 mm starkem Volldraht zu einem Durchmesser von 40 mm (Mitte zu Mitte) zusammengebogen, wobei jeweils ein 2 mm breiter Spalt zur Unterbrechung des Stromflusses offen gelassen wurde.

Abb. 6

Anordnung der geschlitzten Kupferringe zum Nachweis des Exponentialgesetzes sowie zur Bestimmung von γ und L . Der Außenleiter ist etwas zurückgeschoben, um den Blick auf die Ringe und deren Halterung freizugeben. Man erkennt ferner die Sonde, mit deren Hilfe die einzelnen Ringe angezapft werden. Sie ist durch eine der Bohrungen im Außenleiter hindurchgesteckt und stellt mittels zweier Kontaktfedern die Verbindung her zwischen den Stirnflächen eines Ringes und dem zur Eichleitung führenden Kabel.



Der Trolitulstab mit den Ringen wurde koaxial in einem Kupferrohr von 120 mm lichtem Durchmesser gehaltert, das die Rolle des Außenleiters der Wendel übernahm. Dieses Rohr war mit einer Anzahl von Bohrungen versehen, durch welche man die Ringe von außen mittels Sonden erreichen konnte (Abb. 6). Durch eine solche Sonde wurde nun einem weit innen liegenden Ring ein hochfrequenter Wechselstrom zugeführt. Die Messung der Flußverteilung wurde dann so vorgenommen, daß die in den einzelnen

Ringem induzierten Spannungen mittels einer zweiten Sonde nacheinander abgegriffen und über ein geschirmtes Kabel und eine Eichleitung einem geeigneten Empfänger zugeführt wurden.

Zur Messung von L wurden beide Sonden an den gleichen Ring angeschlossen. Da der innere Widerstand der Stromquelle sowie der Eingangswiderstand der Eichleitung genau bekannt waren (jeweils 60 Ohm), konnte so anhand einer Parallelmessung, bei der der Ring weggelassen wurde, die Impedanz des Ringes dem Betrage nach bestimmt werden. Diese rührt bei den gewählten Frequenzen praktisch allein von der Induktivität her, so daß der ohm'sche Anteil innerhalb der Fehlergrenzen vernachlässigt werden konnte. Es ergab sich so eine Induktivität von $32,1 \text{ nH} \pm 1,5\%$, gemittelt über verschiedene Messungen zwischen 250 KHz und 10 MHz. Dieser Frequenzbereich, der auch bei der γ -Bestimmung eingehalten wurde, ist dadurch festgelegt, daß einerseits bei der tiefsten Frequenz der Skin Effekt noch genügend stark ausgeprägt sein muß, und andererseits bei der höchsten Frequenz noch keine kapazitiven Nebenwirkungen merklich werden dürfen. Dies bedeutet, daß man mit der höchsten Frequenz noch genügend weit unterhalb der Eigenresonanz des geschlitzten Ringes bleiben muß. Nimmt man für die Eigenkapazität des Ringes einen Wert von ca. 1 pF an, so ergibt sich mit der gemessenen Induktivität eine Eigenfrequenz von ca. 890 MHz. Andererseits beträgt die Eindringtiefe bei 250 KHz erst 0,13 mm, so daß man innerhalb des genannten Frequenzbereichs zuverlässige Ergebnisse erwarten darf.

Die bei der Messung des Flußabfalls erhaltenen Ergebnisse sind in Abb. 7 dargestellt. Auf der Ordinaten sind die induzierten Spannungen in db aufgetragen. Die Teilung der Abszissen in laufenden Windungsnummern ist identisch mit der Entfernung der jeweils angezapften Windung von der gespeisten in cm, da der Abstand der Kupferringe Mitte zu Mitte 1 cm betrug. In der gewählten Darstellung erscheint ein exponentieller Abfall als fallende Gerade, deren Steigung ein Maß für die Konstante des Flußabfalls γ ist; und zwar ist mit den hier gewählten Einheiten:

$$\gamma = \frac{-1}{20 \cdot \log e} \cdot \frac{d[\text{db}]}{dx} \approx -0,115 \frac{d[\text{db}]}{dx} .$$

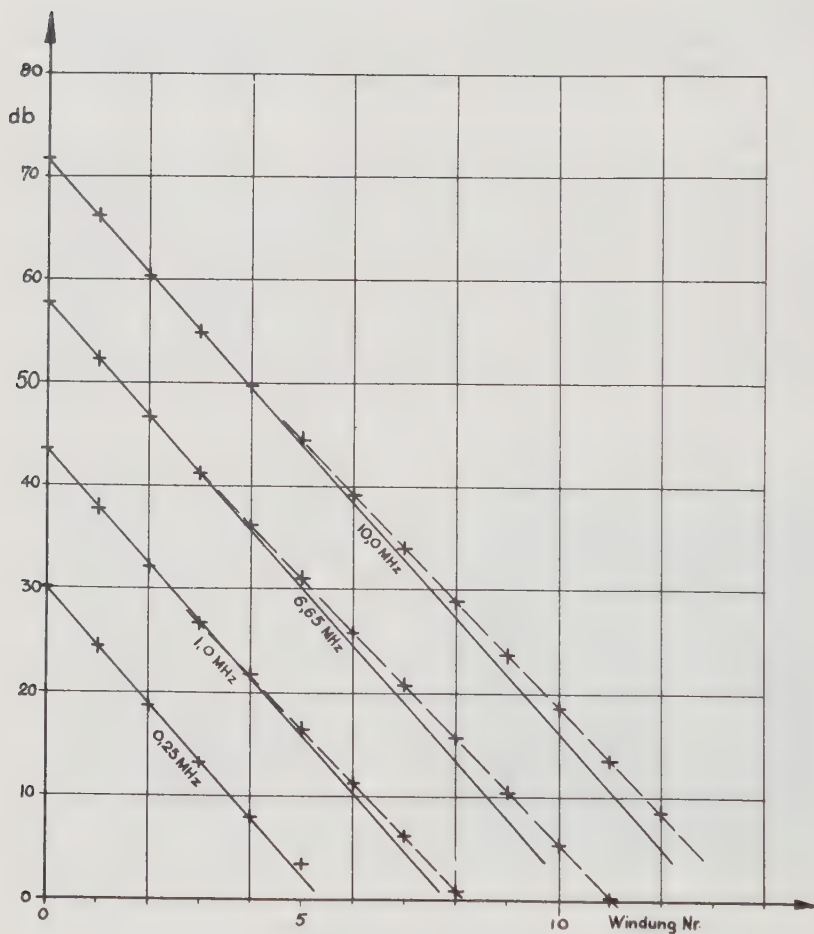


Abb. 7

Der gemessene Flußverlauf in halb-logarithmischer Darstellung.

Man erkennt aus Abb. 7, daß man die Meßpunkte innerhalb ihrer Fehlergrenzen von einigen Zehntel db über die ersten 20 db sehr gut durch eine Gerade verbinden kann. Es sei bemerkt, daß die Querstriche auf der Ordinaten an den Endpunkten der gezeich-

neten Geraden ebenfalls noch Meßpunkte darstellen, die erhalten wurden, indem die Abtastsonde direkt an die gespeiste Windung angeschlossen wurde. Unterhalb 20 db treten dann nach und nach stärkere Abweichungen auf und man bemerkt, daß die Punkte dort wieder praktisch auf einer Geraden liegen, wobei der Abfall dieser Geraden etwas schwächer ist als bei den Werten innerhalb der ersten 20 db. Die ausgezogenen Geraden, die die Punkte innerhalb der ersten 20 db berücksichtigen, liefern für γ einen Wert von $0,64 \pm 0,01 \text{ cm}^{-1}$, während die gestrichelten Geraden, die den Flußverlauf in größerer Entfernung von der gespeisten Windung berücksichtigen, einen Wert von $\gamma = 0,59 \text{ cm}^{-1}$ liefern. Der Unterschied zwischen diesen beiden Werten ist indessen nicht sehr groß. Demgegenüber lieferte ein Parallelversuch, bei dem zwei Ringe in Abwesenheit weiterer Metallmassen auf einer optischen Bank gegeneinander verschoben wurden, einen überall gekrümmten Verlauf, wie man dies nach dem Biot-Savart'schen Gesetz auch erwarten muß. Die Steigung dieser Kurve entsprach bei geringem Abstand der beiden Ringe einem γ von $1,03 \text{ cm}^{-1}$, fiel dann bei wachsendem Abstand stetig ab und entsprach bei 13 cm Abstand einem γ von nurmehr $0,19 \text{ cm}^{-1}$. Man erkennt hieran, wie stark der Flußverlauf durch die Anwesenheit der übrigen Ringe beeinflußt und dem aus der Theorie folgenden Exponentialgesetz nahegebracht wird.

Berechnet man K unter der Annahme, daß man das Feld zwischen je zwei Windungen näherungsweise als "eben" betrachten kann, d.h. berechnet man die Kapazität zwischen zwei benachbarten Ringen so, als ob sich 2 Zylinder von der Länge $2\pi a$ und dem Durchmesser d im Windungsabstand s (Mittelpunktsabstand) einander gegenüberstehen, so gilt

$$K = \frac{2\pi\epsilon_0}{4 \ln\left[\frac{s}{d}\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{d}{s}\right)^2}\right)\right]} \quad [\text{cm}]$$

Benutzt man ferner für D die Beziehung (11), so erhält man für das benutzte Meßobjekt mit $a = 2,0 \text{ cm}$, $b = 6,0 \text{ cm}$, $s = 1,0 \text{ cm}$, $d = 0,8 \text{ cm}$:

$$\gamma = \frac{1}{s} \sqrt{\frac{D}{K}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{a^2}{4s^2}} \cdot \frac{1}{Ks}} = 0,50 \text{ cm}^{-1}$$

und

$$L = 35,0 \text{ nH.}$$

Die Übereinstimmung mit den gemessenen Werten muß als gut bezeichnet werden, wenn man außer den Näherungen, die in der Berechnung von D und K stecken, noch die Fehlerquelle berücksichtigt, die durch die 2 mm breiten Schlitzte in den Kupferringen bedingt ist. In der Nähe dieser Schlitzte wird nämlich die Stromverteilung gestört und entspricht nicht mehr den Voraussetzungen der Theorie. Die besonders starken Strombelegungen an den Seitenflächen der Ringe (vergl. Abb. 4) schließen sich über die Stirnflächen der Spalte. Dies bedeutet, daß die Dichte des in den Außenraum entweichenden Flusses in den Spalten von gleicher Größenordnung ist wie die Flußdichte zwischen den Ringen. Da die Spaltbreite bei dem verwendeten Meßobjekt gleich dem lichten Abstand der Ringe ist, verhält sich der durch einen Spalt entweichende Flußanteil zu dem zwischen zwei Ringen entweichenden größenordnungsmäßig etwa wie die Drahtstärke des Ringes zu dessen Umfang, also etwa wie 0,8 zu 13. Um den entsprechenden Betrag fällt der Fluß im Innenraum stärker ab, wird also γ zu groß gemessen. Diese Faustbetrachtung, die nur die Spalte selbst und nicht deren nähere Umgebung berücksichtigt, erklärt bereits einen großen Teil der beobachteten Abweichung.

Im folgenden Kapitel sollen die charakteristischen Leitungsgrößen aufgrund der hier entwickelten Theorie abgeleitet, diskutiert und mit den Ergebnissen des Schichtmodells und Meßergebnissen verglichen werden.

Auswertung der Theorie, Vergleich mit dem Schichtmodell und Meßergebnissen.

2.1. Phasengeschwindigkeit und Dispersion.

Die Gleichung 4. Ordnung für das Geschwindigkeitspotential und auch für die anderen Größen ϕ , U und J zeigt, daß fortschreitende elektromagnetische Wellen auf der Wendel, die zeitlich sinusförmig veränderlich sind, eine von der Frequenz abhängige Phasengeschwindigkeit besitzen. Dieses Dispersionsphänomen sei Gegenstand der Betrachtungen.

2.1.1. Ableitung und Diskussion.

Für die Phasengeschwindigkeit $v_p = \frac{\omega}{k}$ erhalten wir mittels (28), wenn wir dort ϵ'^2 aus der Wurzel herausziehen [vergl. (33)]:

$$v_p = v_p' \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - q \frac{\epsilon'^2 + 1}{\epsilon'^2}}} \quad (36)$$

Hierbei ist $v_p' = c \cdot \frac{s}{2\pi a}$ wie früher diejenige Phasengeschwindigkeit, die - bei eng gewickelter Wendel - einer mit Lichtgeschwindigkeit über den Draht laufenden Welle zukäme, und $\epsilon' \gamma = k' = \frac{\omega}{c} \cdot \frac{2\pi a}{s}$ ist die zugehörige Wellenzahl. Ferner ist zur Abkürzung gesetzt:

$$q = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\epsilon'^2 \frac{1 - \frac{a}{b}}{(1 + \epsilon'^2)^2}}}{2} \quad (37)$$

Im allgemeinen ist $C \ll D$, wie man erkennt, wenn man, wie in der Fußnote S. 20, für C die Kapazität eines Zylinderkondensators der Länge s und für D den Ausdruck (11) setzt. Der sich unter dieser Annahme ergebende Zusammenhang zwischen C/D und dem Verhältnis b/a von Außenleiter- zu Wendelradius ist in Abb. 8 dargestellt (es sei stets vorausgesetzt, daß die Leitung kein Dielektrikum enthält).

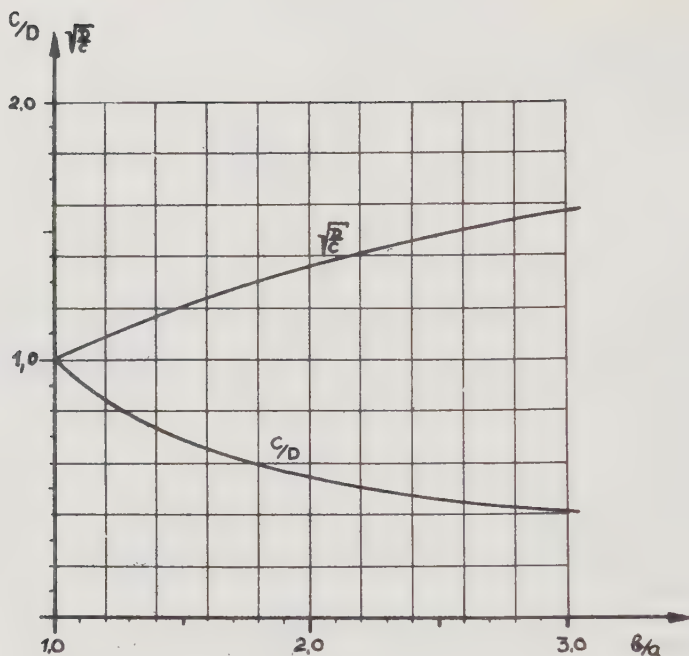


Abb. 8

C/D und $\sqrt{C/D}$ als Funktion des Verhältnisses b/a von Außenleiter- zu Wendelradius.

Wir wollen nun (36) in Abhängigkeit von den verschiedenen Größen diskutieren. Hierbei wollen wir zunächst annehmen, daß der Außenleiterradius nicht sehr viel größer ist als der Wendelradius, da sich dann (36) genähert in einer leichter zu übersehenden Form schreiben läßt. Im Grenzfall eng anliegenden Außenleiters wird $C/D = 1$, somit $q = 0$ und mithin $v_p = v'_p$. Ist der Außenleiterradius b nicht sehr viel größer als der Wendelradius a , so ist C/D nur wenig kleiner als 1 und man kann die Wurzel in (37) entwickeln und nach dem linearen Gliede abbrechen. Dann wird

$$q \approx \left(1 - \frac{C}{D}\right) \frac{\varepsilon'^2}{(1 + \varepsilon'^2)^2}$$

und mithin

$$v_p \approx v'_p \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1 - \frac{C}{D}}{1 + \varepsilon'^2}}}$$

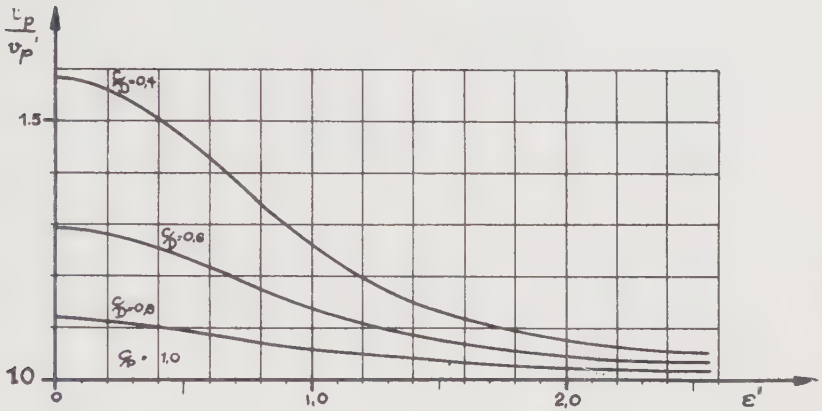


Abb. 9

Die normierte Phasengeschwindigkeit als Funktion von $\epsilon' = \frac{\omega}{c} \cdot \frac{2\pi a}{\gamma_s}$ mit $\frac{c}{D}$ als Parameter.

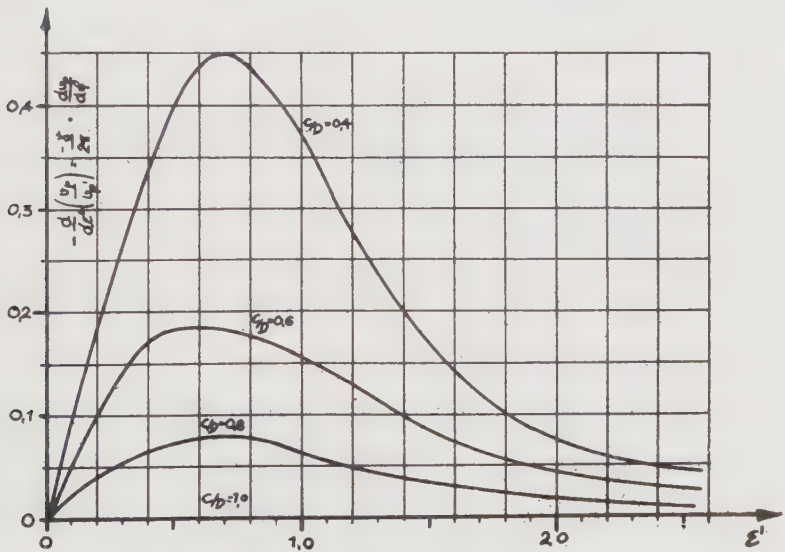


Abb. 10

Normierte Dispersion mit $\frac{c}{D}$ als Parameter

Wie man sieht, ist die Phasengeschwindigkeit für $\varepsilon' = 0$ (verschwindende Frequenz) um den Faktor $\sqrt{D/C}$ größer als v_p' , nimmt bei wachsender Frequenz monoton ab und geht im Grenzfall hoher Frequenz ($\varepsilon' \rightarrow \infty$) gegen v_p' . Die Differenz zwischen den Phasengeschwindigkeiten in den beiden Grenzfällen $\varepsilon' \rightarrow 0$ und $\varepsilon' \rightarrow \infty$ wächst also mit kleiner werdendem C/D , d.h. mit wachsendem Außenleiterradius (vergl. Abb. 8). Dieses Verhalten gilt auch noch, wenn b/a stark von 1 verschieden ist, wenn also die obige leicht zu diskutierende Näherungsformel nicht mehr zutrifft. In Abb. 9 ist der Zusammenhang zwischen v_p/v_p' und ε' für mehrere Werte von C/D dargestellt, wie er sich aus der strengen Beziehung (37) ergibt. ε' hängt gemäß $\varepsilon' = 2\pi \frac{2\pi a}{\gamma c a} \cdot f$ in einfacher Weise mit der Frequenz zusammen.

Man erkennt aus Abb. 9, daß für $C/D \neq 1$ eine Dispersion auftritt, und zwar umso stärker, je mehr C/D von 1 verschieden ist. Wir wollen die Dispersion generell durch die Größe $\frac{d v_p}{d f}$ (f = Frequenz) charakterisieren. Diese Größe läßt sich durch Multiplikation mit $\gamma/2\pi$ überführen in $\frac{d}{d \varepsilon'} \left(\frac{v_p}{v_p'} \right)$, was nur noch von ε' und C/D abhängt und mithin wieder durch eine einfache Kurvenschar dargestellt werden kann. Diese Kurvenschar zeigt Abb. 10. Man sieht, daß die Dispersion in den beiden Grenzfällen $\varepsilon' \rightarrow 0$ und $\varepsilon' \rightarrow \infty$ verschwindet, sonst stets negativ ist und daß das durchlaufene Extremum umso stärker ausgeprägt ist, je mehr C/D von 1 verschieden ist.

2.1.2. Vergleich.

Die Phasengeschwindigkeit wurde an verschiedenen Wendelmodellen, deren geometrische Parameter so gewählt waren, wie sie für einen Wendellinearbeschleuniger in Frage kommen [3], experimentell bestimmt.^{*)} Die Meßergebnisse (I) finden sich zusammen mit den

+) Näheres über die Beschaffenheit der Wendelmodelle findet sich in den Vorbemerkungen zu Kapitel 3 (S. 58).

nach der hier entwickelten Theorie berechneten (ausgezogen) sowie den nach dem Schichtmodell aus den Berechnungen von Müller und Rembser [3] ermittelten (gestrichelt) in Abb. 11. Außerdem sind dünn gestrichelt bzw. strichpunktiert die Grenzwerte β_0 und β_∞ für verschwindende bzw. unendlich hohe Frequenz eingezeichnet, die übrigens bei eng gewickelten Wendeln praktisch mit den aus dem Schichtmodell folgenden zusammenfallen.

Zur Auswertung unserer Theorie wurden die einzelnen Leitungskonstanten wie folgt aus den geometrischen Daten berechnet:

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{s}{1 - \frac{a^2}{b^2}} & [\text{cm}^{-1}] & \text{gemäß (11),} \\ C &= \frac{s}{2 \ln \frac{b}{a}} & [\text{cm}^{-1}] & \text{als Zylinderkondensator der Länge s,} \\ K &= \frac{2\pi a}{4 \cdot \ln \left[\frac{2}{a} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b} \right)^2} \right) \right]} & [\text{cm}^{-1}] & \text{als Kapazität zweier paralleler Drähte mit dem Durchmesser d und dem gegenseitigen Abstand s (Mitte zu Mitte), deren Länge } 2\pi a \text{ dem Umfang der Wendel entspricht.} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

(In dieser Formel ist die ungleichförmige Ladungsverteilung längs des Umfanges berücksichtigt, vergl. S. 31).

Man erkennt aus Abb. 11, daß der gemessene Verlauf durch die hier entwickelte Theorie teils etwas besser, teils etwas schlechter wiedergegeben wird als durch das Schichtmodell. Im großen und ganzen scheint bezüglich der Phasengeschwindigkeit unsere Theorie ebensogut oder etwas besser zu sein als dieses. Es erscheint bemerkenswert, daß selbst im Falle der Wendel IV, die wegen ihres großen Windungsabstandes die Voraussetzungen unserer Theorie eigentlich nicht mehr erfüllt, die Abweichungen nur knapp 7% betragen und bei kleiner Frequenz noch etwas niedriger sind als beim Schichtmodell.

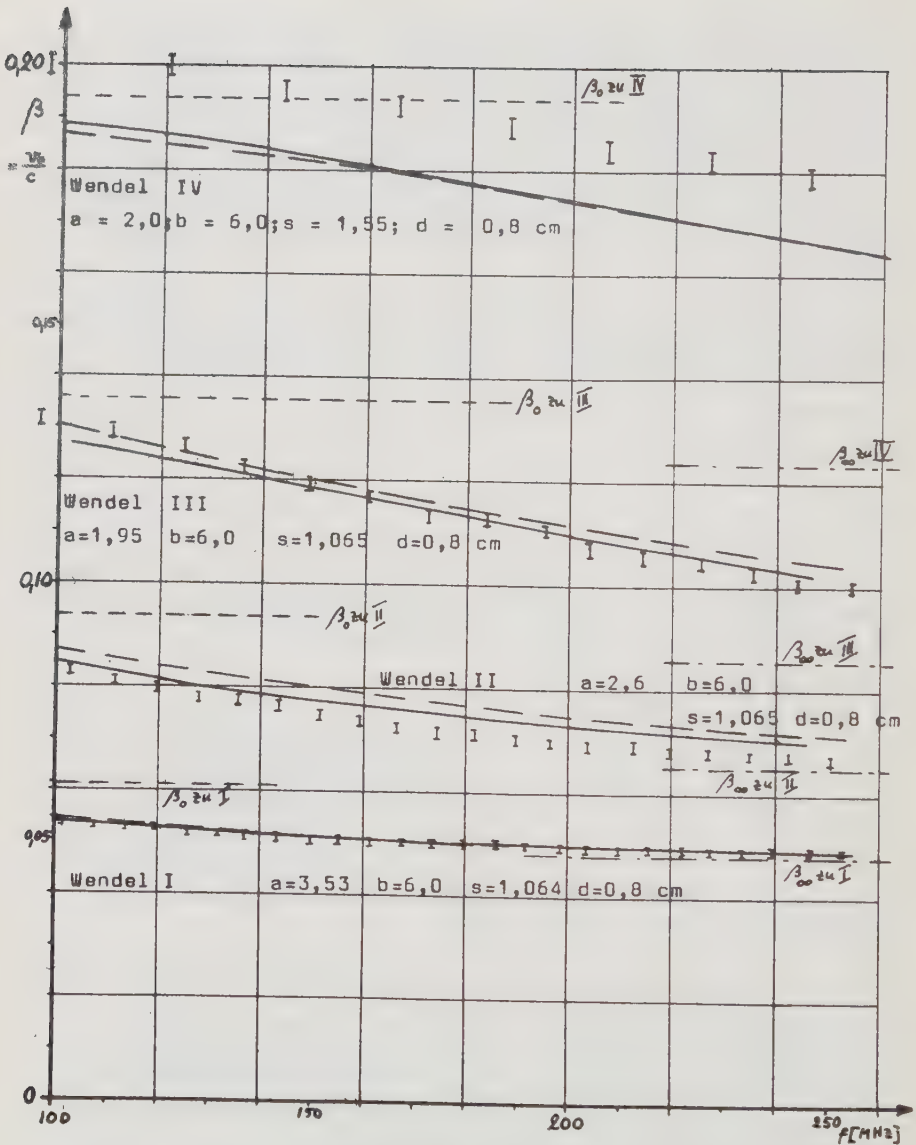


Abb. 11

Die gemessene Phasengeschwindigkeit (I) bei verschiedenen Wendeln im Vergleich mit der hier entwickelten Theorie (—) und dem Schichtmodell (---). β_0 und β_∞ sind die theoretischen Grenzwerte

$\frac{s}{2\pi a} \sqrt{\frac{D'}{K}}$ bzw. $\frac{s}{2\pi a}$ für verschwindende bzw. unendlich hohe Frequenz.

Entsprechend den verschiedenen geometrischen Parametern der einzelnen Wendeln sind die Proportionalitätsfaktoren $2\pi \frac{2\pi a}{c\gamma\epsilon}$ zwischen der Frequenz und ϵ' bei den einzelnen Wendeln verschieden, so daß der Frequenzbereich von 100 bis 250 MHz bei den einzelnen Kurven in Abb. 11 verschiedenen Abszissenabschnitten in Abb. 9 entspricht; und zwar schrumpfen diese Abschnitte im Sinne steigender laufender Nummern der Wendeln zusammen und rücken nach links. Es scheint demnach, daß der von der Phasengeschwindigkeit durchlaufene Übergang zwischen den beiden Grenzwerten β_0 und β_∞ in Wirklichkeit etwas steiler erfolgt als nach der Theorie, wie es in Abb. 12 schematisch übertrieben dargestellt ist. Dementsprechend sind die Maximalwerte der Dispersion in Wirklichkeit höher, als nach der Theorie zu erwarten ist.

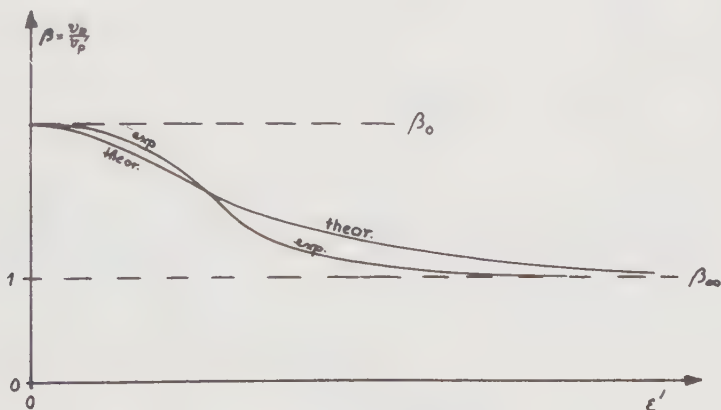


Abb. 12

Schematische Darstellung der Abweichungen zwischen dem theoretischen Verlauf der Phasengeschwindigkeit und dem gemessenen.

2.2. Wellenwiderstand.

2.2.1. Ableitung

Als Wellenwiderstand wollen wir hier - abweichend von der üblichen Definition - das Verhältnis $\frac{U}{J}$ einer fern von den Wendelenden nach rechts laufenden Welle bezeichnen. Diesen Wellenwiderstand erhalten wir, indem wir (31) durch (30) dividieren und dabei beachten, daß die Glieder mit reellen Exponenten fern von den Wendelenden abgeklungen sind und daß die Amplitude a_4 der rückläufigen Welle voraussetzungsgemäß verschwindet. Es ergibt sich

$$Z \equiv \frac{U}{J} = \frac{(2\pi a)^2 k_0}{D s \gamma \varepsilon (1 + \varepsilon^2)} \quad , \quad (39)$$

was wir wegen $\gamma \varepsilon = k$ und $\frac{k_0}{k} = \frac{v_p}{c} = \beta$ auch einfacher schreiben können:

$$Z = 30 \frac{(2\pi a)^2}{D s} \cdot \frac{\beta}{1 + \varepsilon^2} \quad [\Omega]$$

Hierbei ist Z durch Hinzufügen eines Faktors 30 von dem benutzten Maßsystem in Ohm umgerechnet. Wir können dies wieder bis auf einen frequenzunabhängigen Faktor durch eine einparametrische Kurvenschar darstellen, wenn wir den Zähler mit β_∞ erweitern und beachten, daß $\beta_\infty = s/2\pi a$ und $\beta/\beta_\infty = v_p/v'_p$ ist. Wir erhalten:

$$Z = \frac{30 \cdot 2\pi a}{D} \cdot \frac{v_p/v'_p}{1 + \varepsilon^2} \quad [\Omega] \quad (40)$$

und mittels (28)

$$Z = \frac{30 \cdot 2\pi a}{D} \cdot \frac{v_p/v'_p}{(1 + \varepsilon'^2)(1 - q)} \quad [\Omega] \quad , \quad (41)$$

wobei $D = s/(1 - \frac{a^2}{b^2})$ ist und v_p/v'_p und q durch (36) und (37) gegeben sind. ε' ist wieder gemäß $\varepsilon' = (4\pi^2 a / \gamma c s) f$ der Frequenz proportional. Der Ausdruck

$$\frac{v_p/v'_p}{(1+\varepsilon'^2)(1-q)} \quad (42)$$

ist in Abb. 13 als Funktion von ε' mit C/D als Parameter dargestellt.

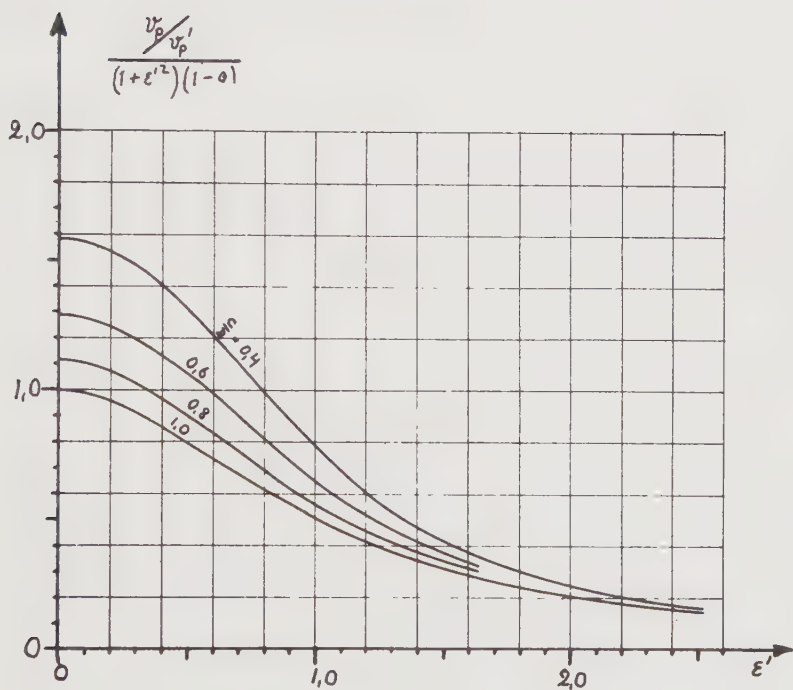


Abb. 13

$\frac{v_p/v'_p}{(1+\varepsilon'^2)(1-q)}$ als Funktion von ε' mit C/D als Parameter.

Der in Abb. 13 dargestellt Ausdruck nimmt wegen des Verschwindens von q für $\varepsilon' = 0$ dort den gleichen Wert an wie v_p/v'_p , nämlich $\sqrt{D/C}$ (vergl. Abb. 9). Er fällt von dort mit wachsendem

ε' monoton ab und geht für $\varepsilon' \rightarrow \infty$ wie $1/\varepsilon'^2$ gegen Null.

2.2.2. Vergleich

Eine direkte Messung des Wellenwiderstandes aus seiner Definition $Z = U/J$ kann aus experimentellen Gründen nicht durchgeführt werden. In 3.2. wurde deshalb die in Abb. 14 gezeigte Schaltungsanordnung experimentell und theoretisch behandelt, bei der stehende Wellen auf einer an den Enden durch Metalldeckel kurzgeschlossene Wendel im Resonanzfall angeregt werden.

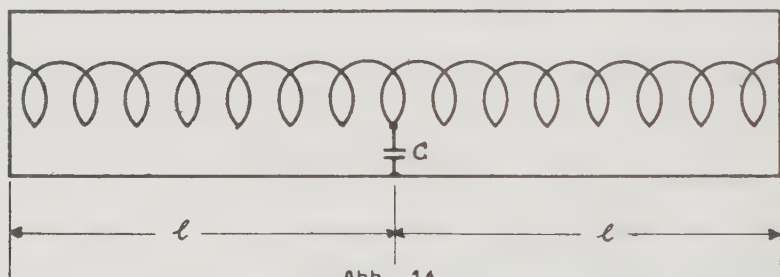


Abb. 14

Die in 3.2. untersuchte Schaltungsanordnung.

Eine Prüfung der Theorie kann also so erfolgen, daß die erhaltene Resonanzfrequenz mit den Voraussagen der Theorie verglichen wird, wobei insbesondere auch der Fall behandelt werden kann, daß ein Kondensator C von der Mitte der Wendel zum Außenleiter gelegt wird. (Der Buchstabe C wird also in diesem Zusammenhang mit anderer Bedeutung gebraucht als bisher). Es ist indessen aus experimentellen Gründen zweckmäßig, hierbei nicht von der Resonanzfrequenz selbst auszugehen, sondern von der (kleinen) Verstimmung, die die Wendel durch das Anlegen der (kleinen) Kapazität C erfährt. Anstelle der gemessenen Verstimmungen kann auch der aus der Theorie folgende Wellenwiderstand (40) angegeben werden. Im Falle einfacher Leitungen kann aus der gemessenen Verstimmung sofort auf den Wellenwiderstand geschlossen werden mittels der Beziehung

$$\frac{wCZ}{2} = -\Delta kl,$$

wobei Δk_l ein Maß für die Verstimmung ist. In unserem Falle ist der Zusammenhang zwischen Z und w komplizierter, läßt sich aber unter Voraussetzung der Gültigkeit der hier entwickelten Theorie berechnen. Man erhält

$$\frac{\omega C Z}{2} = - \Delta k_l \cdot \frac{\delta^2 + \varepsilon^2 - \frac{1}{\gamma \varepsilon}}{1 + \varepsilon^2} \quad (43)$$

wobei δ , ε und γ wieder durch (33) gegeben sind.

An den oben bereits erwähnten vier Wendelmodellen wurden die Verstimmungen in der obigen Anordnung gemessen und mittels (43) auf den Wellenwiderstand umgerechnet. Die Ergebnisse sind in Abb. 15 a ... d zusammen mit den nach der hier entwickelten Theorie^{+) und den nach dem Schichtmodell berechneten dargestellt (die letzteren Kurven sind wieder gestrichelt).}

Man erkennt aus diesen Abbildungen, daß der Wellenwiderstand durch die hier entwickelte Theorie wesentlich besser wiedergegeben wird als durch das Schichtmodell. Dies ist insofern verständlich, als der Wellenwiderstand gewöhnlich recht empfindlich von den geometrischen Parametern einer Leitung abhängt, diese aber hier besser berücksichtigt werden als bei dem stark idealisierenden Modell einer unendlich dünnen Schicht mit anisotroper Leitfähigkeit.

Die gute Übereinstimmung der aufgrund von (43) aus der Verstimmungsmessung erschlossenen Wellenwiderstände mit den aus (40) berechneten rechtfertigt nachträglich die Verwendung der hier entwickelten Theorie zur Umrechnung der gemessenen Verstimmung auf den Wellenwiderstand

+) Hierbei wurden die Leitungskonstanten wieder nach (38) berechnet.

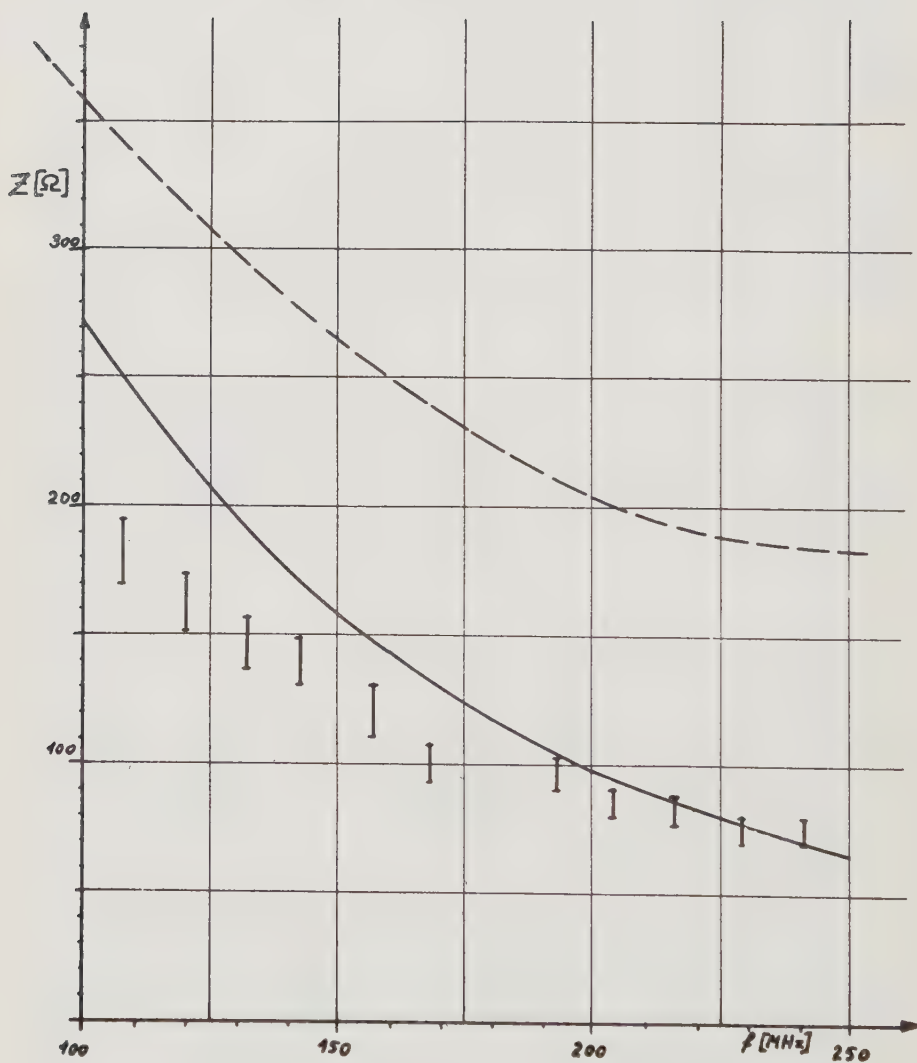


Abb. 15a

Der Wellenwiderstand bei Wendel I. $a = 3,53$ cm,
 $b = 6$ cm, $s = 1,064$ cm, $d = 0,8$ cm.

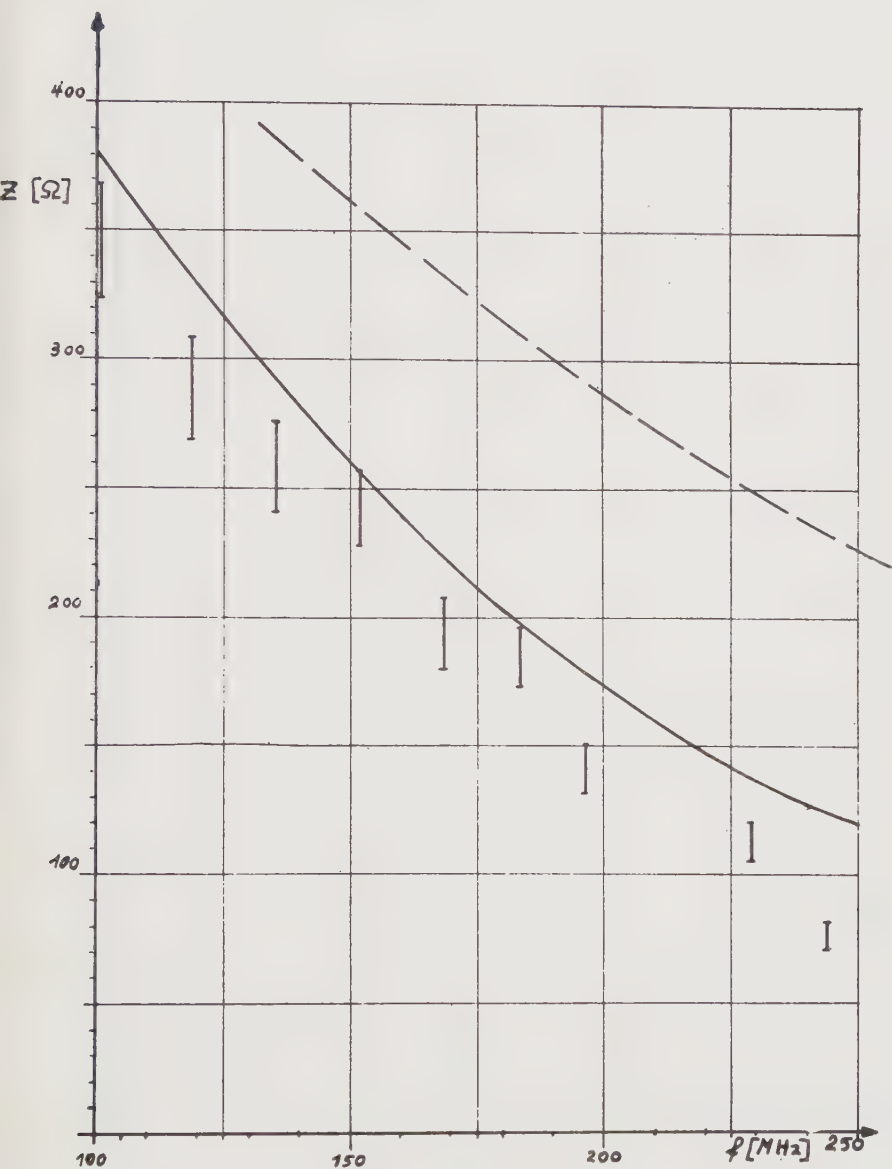


Abb. 15b

Der Wellenwiderstand bei Wendel II. $a = 2,6$ cm,
 $b = 6$ cm, $s = 1,065$ cm, $d = 0,8$ cm.

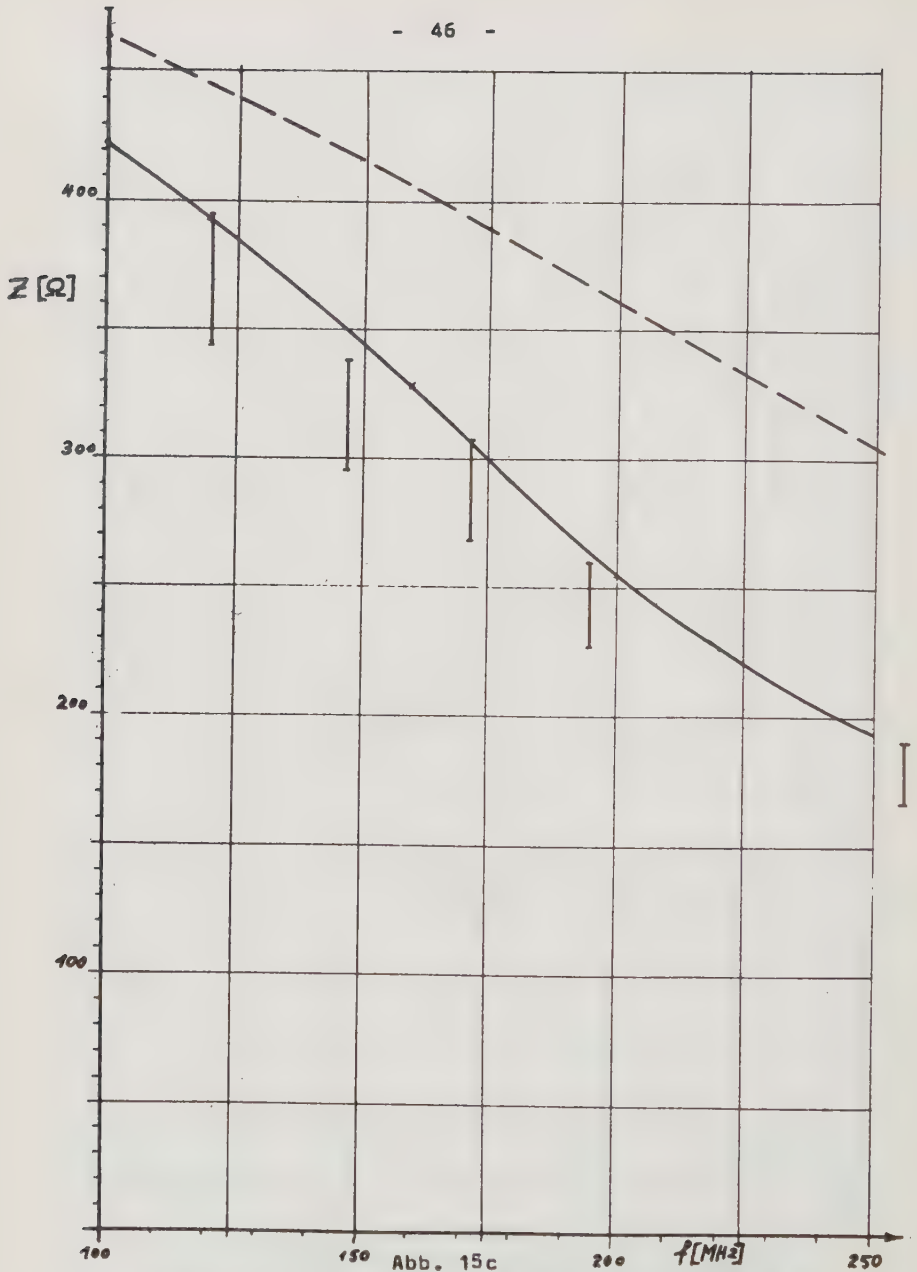


Abb. 15c

Der Wellenwiderstand bei Wendel III. $a = 1,95$ cm,
 $b = 6$ cm, $s = 1,05$ cm, $d = 0,8$ cm.

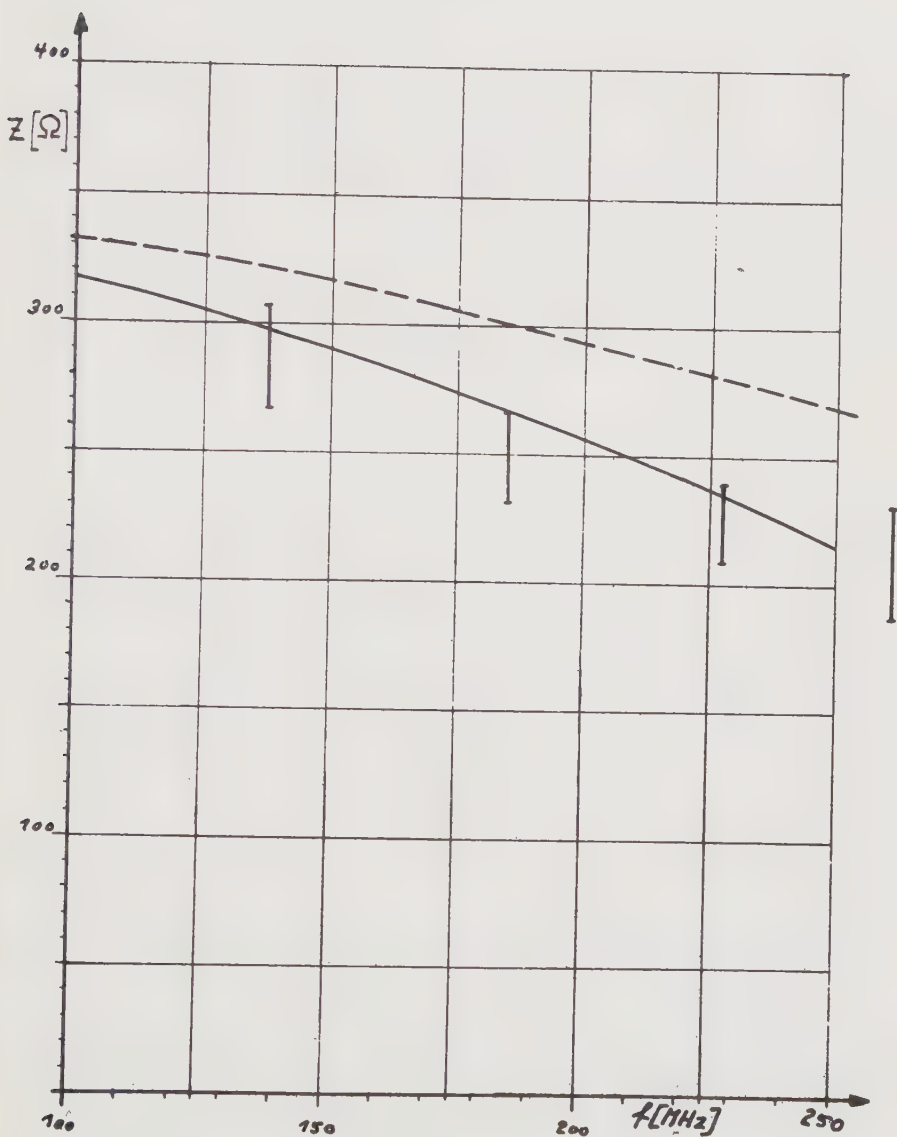


Abb. 15d

Der Wellenwiderstand bei Wendel IV. $a = 2,0$ cm,
 $b = 6$ cm, $s = 1,55$ cm, $d = 0,8$ cm.

2.3. Serienimpedanz.

Beim Wendellinearbeschleuniger handelt es sich bekanntlich darum, geladene Teilchen durch das axiale elektrische Feld zu beschleunigen, das sich aufgrund der periodischen Ladungsverteilung auf der Innenseite der Wendel auf der Wendelachse ausbildet und zusammen mit dieser Ladungsverteilung mit der Phasengeschwindigkeit v_p auf der Wendelachse läuft. Es besteht eine eindeutige Zuordnung zwischen diesem axialen elektrischen Feld E und dem Leistungsfluß S auf der Wendel. Wir definieren

$$\xi = \frac{E^2}{S}, \quad (44)$$

wobei E der Maximalwert der elektrischen Feldstärke auf der Achse ist und nennen ξ die "Serienimpedanz". ξ hängt von allen geometrischen Parametern der Wendel und insbesondere auch von der Frequenz ab. Bei Kenntnis von ξ ist es möglich, für einen geplanten Linearbeschleuniger den notwendigen Leistungsfluß S zu berechnen. ξ ist also einer der entscheidenden Parameter, der sowohl nach dem Schichtmodell als auch im Rahmen der hier vorgetragenen Leitungstheorie ermittelt werden kann. Die leitungstheoretische Berechnung von ξ soll nun durchgeführt werden, wobei sich wiederum eine Überlegenheit der Leitungstheorie gegenüber dem Schichtmodell ergeben wird.

2.3.1. Ableitung.

Wir betrachten das Schaltbild Abb. 16, an dem (als Gedankenexperiment) die Ableitung des Leistungsflusses demonstriert werden soll. Wegen der komplizierten Feldkonfiguration im Falle der Wendel ist der Leistungsfluß nicht, wie bei einfachen Leitungen, durch das Produkt $U \cdot I$ gegeben. Wir können ihn aber aufgrund des folgenden Gedankenexperimentes auf den Leistungsfluß bei einer einfachen Leitung zurückführen: Wir stellen uns vor, daß - etwa mittels eines Koaxialkabels - eine Spannung an der Mitte einer nach beiden Seiten unendlich langen Wendel angelegt wird.

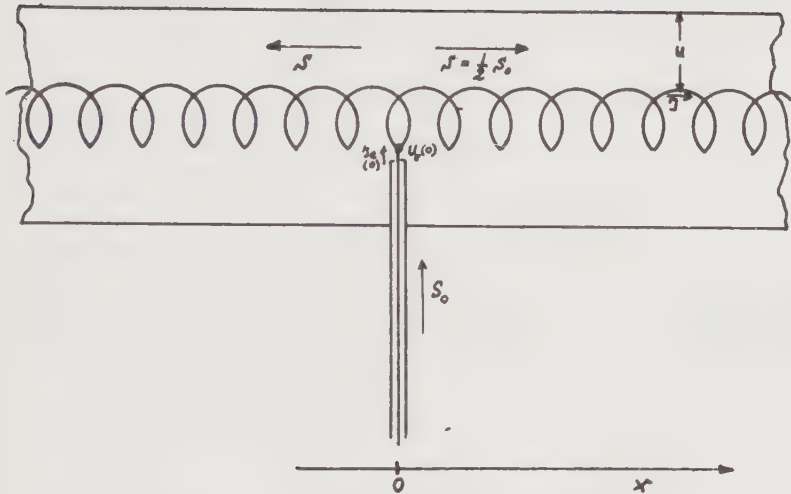


Abb. 16

Gedankenexperiment zur Berechnung
des Leistungsflusses auf der Wendel.

Die in die Wendel eingespeiste Leistung S_0 ist dann gegeben durch das Skalarprodukt

$$S_0 = \left[\frac{U_e(0) \cdot J_e(0)}{2} \right], \quad (45)$$

wobei $U_e(0)$ und $J_e(0)$ die eingespeisten komplexen Amplituden von Spannung und Strom auf dem Zuführungskabel an der Anschlußstelle sind. Aus Symmetriegründen wird sich dieser Leistungsfluß symmetrisch auf die beiden Wendelhälften verteilen. Es wird also hier davon Gebrauch gemacht, daß bei einfachem Koaxialkabel die Wirkleistung durch das Produkt von Spannung und Wirkstrom gegeben ist (zur Vermeidung von Randstörungen im Zuführungskabel kann man sich dessen Durchmesser im Prinzip beliebig klein denken). Aus Stetigkeitsgründen ist nun $U_e(0)$ gleich der Spannungsamplitude $U(0)$ auf der Wendel an der Einspeisungsstelle, während sich $J_e(0)$ symmetrisch in die beiden Wendelhälften verzweigen wird. Da die Ströme auf der Wendel in gleichen Abständen von der Einspeisungsstelle zu beiden Seiten entgegengesetzte Vorzeichen, aber aus Symmetriegründen gleiche Beträge

haben, muß ferner der magnetische Fluß ϕ im Wendelinnern bei $x = 0$ verschwinden. Für die rechte Wendelhälfte (die wir im folgenden ausschließlich betrachten), gelten also die Randbedingungen:

$$U(0) = U_g(0)$$

$$J(0) = \frac{1}{2} J_g(0)$$

$$\phi(0) = 0$$

Hiermit gehen wir in die Bestimmungsgleichungen (34) für die Teilamplituden a_v des Geschwindigkeitspotentials ein und erhalten, wenn wir beachten, daß wegen des Fehlens einer rückläufigen Welle auf der Wendel a_4 identisch verschwindet:

$$a_1 \delta (1 - \delta^2) + a_2 \cdot j \epsilon (1 + \epsilon^2) = \frac{(2\pi a)^2}{r^D} \cdot \frac{1}{2} J_g(0) ,$$

$$a_1 + a_2 = -j \frac{s}{k_0} U_g(0) ,$$

$$a_1 \delta + a_2 j \epsilon = 0 .$$

Indem wir aus den beiden ersten Gleichungen a_1 mittels der dritten eliminieren, erhalten wir

$$a_2 \cdot j \epsilon (\delta^2 + \epsilon^2) = \frac{(2\pi a)^2}{r^D} \cdot \frac{1}{2} J_g(0) ,$$

$$a_2 \left(\frac{\epsilon}{\delta} + j \right) = \frac{s}{k_0} U_g(0) .$$

Um nun hier S einführen zu können, bilden wir den Realteil des Produkts dieser beiden Gleichungen und erhalten mit (45)

$$|a_2|^2 \cdot \epsilon (\epsilon^2 + \delta^2) = \frac{s}{k_0} \cdot \frac{(2\pi a)^2}{r^D} \cdot 2S ,$$

wobei $S = \frac{1}{2} S_0$ die in die rechte Wendelhälfte hineinlaufende Wirkleistung ist. Beachten wir nun, daß a_2 gemäß (31) bis auf einen Faktor $j \frac{k_0}{s}$ die Spannungsamplitude U der auf der Wendel nach rechts laufenden Welle ist, so wird

$$S = \frac{r^{SD}}{2k_0 (2\pi a)^2} \cdot \epsilon (\epsilon^2 + \delta^2) \cdot |U|^2 . \quad (46)$$

Führt man hier noch mittels (39) den Wellenwiderstand Z ein, so ergibt sich schließlich unter Beachtung von (28):

$$S = \frac{|U|^2}{2Z} \cdot \left(1 - \frac{q}{1-q}\right).$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem für einfache Leitungen geltenden um den Faktor

$$1 - \frac{q}{1-q},$$

der in Abb. 17 wieder als Funktion von ϵ' mit C/D als Parameter dargestellt ist. Wie man sieht, ist S im Allgemeinen kleiner,

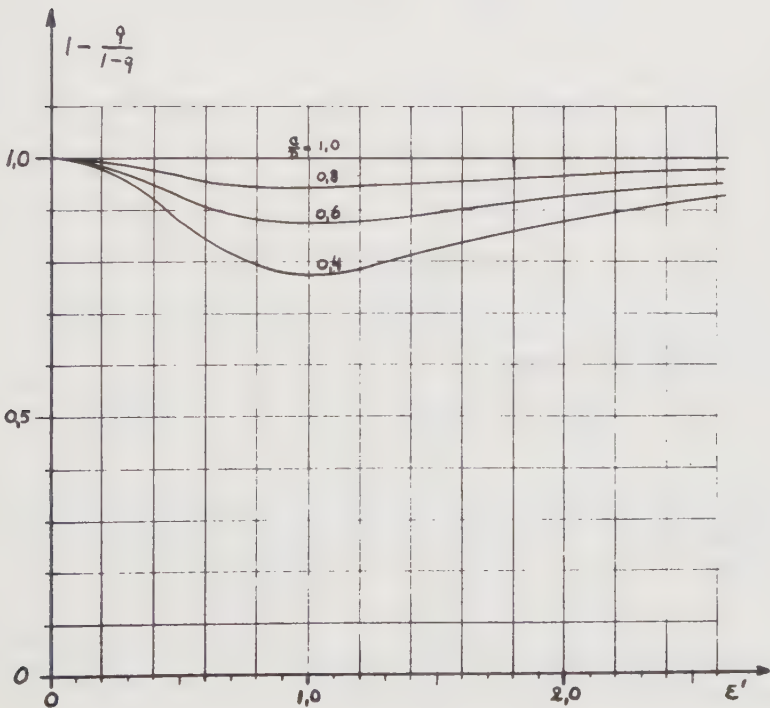


Abb. 17

Der Faktor $1 - \frac{1}{1-q}$, der angibt, um wieviel kleiner der Leistungsfluß auf der Wendel ist als $\frac{|U|^2}{2Z}$

als man es nach der für einfache Leitungen geltenden Formel $S = \frac{|U|^2}{2Z}$ erwarten würde. Nur für $C/D = 1,0$, d.h. im Grenzfall eng anliegenden Außenleiters sowie auch in den Grenzfällen verschwindender und sehr hoher Frequenz gilt die Formel für einfache Leitungen.

Zur Berechnung von § müssen wir nun noch in (46) $|U|$ durch E , die Amplitude des axialen elektrischen Feldes auf der Achse, ersetzen. Im Rahmen unserer quasistationären Behandlung ergibt sich dieses Feld aus der Potentialverteilung, d.h. als Lösung der Laplace'schen Potentialgleichung $\Delta p = 0^+$). Diese lautet, wenn man bereits für periodische Felder separiert hat, in Zylinderkoordinaten

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - k^2 f = 0$$

mit

$$p = f(r) \cdot e^{j(\omega t - kx)}$$

und wird gelöst durch

$$f(r) = A \cdot I_0(kr) \quad .$$

Hierbei ist I_0 die modifizierte Besselfunktion nullter Ordnung (d.h. die gewöhnliche Besselfunktion nullter Ordnung mit imaginärem Argument). Für das elektrische Feld im Innenraum der Wendel ergibt sich mithin:

$$\mathcal{E}_x(r) = - \frac{\partial p}{\partial x} = jkA I_0(kr) e^{j(\omega t - kx)} \quad .$$

Zur Bestimmung der Konstanten A müssen wir dies an das elektrische Axialfeld an der Wendeloberfläche anschließen, das gegeben ist durch

$$\mathcal{E}_x(a) = - \frac{\partial u}{\partial x} = jkU_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

+) Wir verwenden hier den Buchstaben p für das elektrostatische Potential, da φ bereits für das Geschwindigkeitspotential vergeben ist.

Damit ergibt sich A zu

$$A = \frac{U}{I_0(ka)} ,$$

und für die Amplitude der elektrischen Axialfeldstärke auf der Achse ($r=0$) erhalten wir

$$E = |E_x(0)| = \frac{k|U|}{I_0(ka)} .$$

Quadrieren und Division durch (46) liefert

$$\xi = \frac{E^2}{S} = \frac{(2\pi a)^2}{\gamma^2 \delta^2} \frac{k_0^2 k^2}{I_0^2(ka)} \cdot \frac{1}{\epsilon(\epsilon^2 + \delta^2)} ,$$

was man auch bequemer schreiben kann:

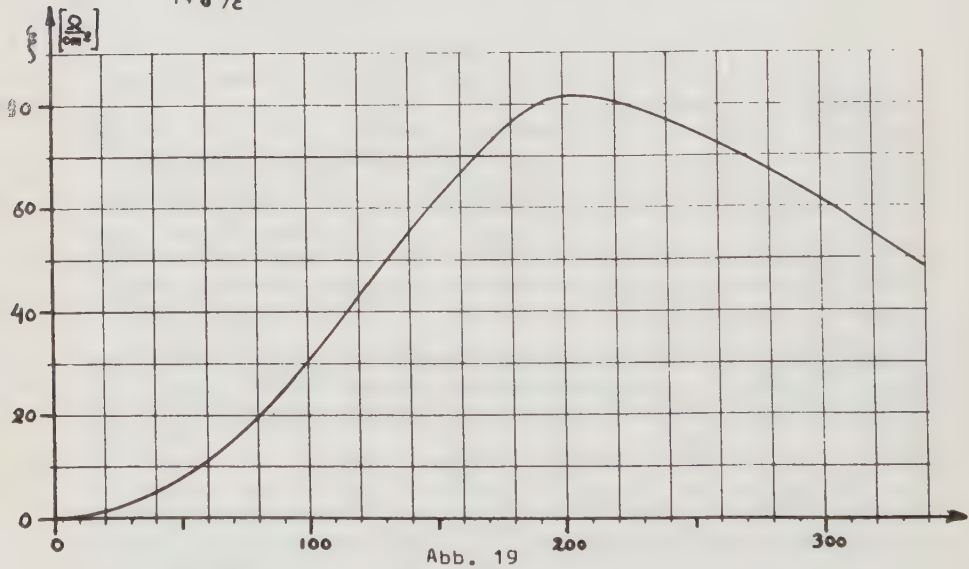
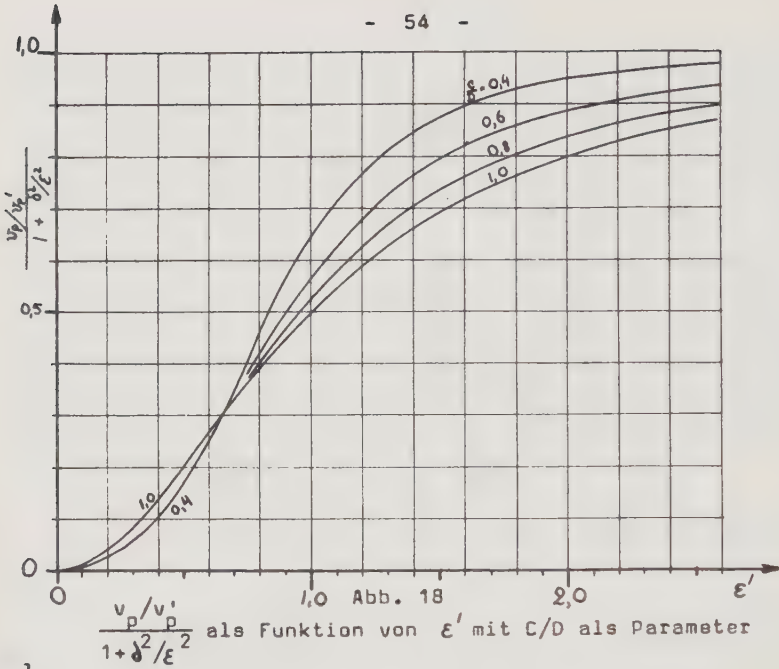
$$\xi = \frac{E^2 [V^2 \cdot cm^{-2}]}{S [W]} = 30 \cdot \frac{2\pi a}{Ks^2} \cdot \frac{2}{I_0^2(ka)} \cdot \frac{v_p/v_p'}{1 + \delta^2/\epsilon^2} \left[\frac{\Omega}{cm^2} \right] \quad (47)$$

wobei wieder mittels des Faktors 30 auf gebräuchliche Einheiten umgerechnet ist. Der Faktor

$$\frac{v_p/v_p'}{1 + \delta^2/\epsilon^2}$$

löst sich wieder als Funktion von ϵ' mit C/D als Parameter darstellen (Abb. 10).

Dieser Ausdruck verschwindet für $\epsilon' = 0$ (im Grenzfall unendlich großer Wellenlänge auf der Wendel verschwindet die axiale elektrische Feldstärke) und nähert sich für $\epsilon' \rightarrow \infty$ dem Wert 1. Wegen $I_0^2(ka)$ im Nenner von (45) wird ξ dann nach Durchlaufen eines Maximums für große Wellenzahlen wieder monoton zu Null abfallen. Abb. 19 zeigt diesen Verlauf für eine bestimmte Wendel als Beispiel.



Q als Funktion der Frequenz für eine Wendel mit den Abmessungen $a = 2$ cm, $b = 6$ cm, $s = 1$ cm, $d = 0,8$ cm.

2.3.2. Vergleich

Eigene Messungen der Serienimpedanz liegen nicht vor. Es wurde aber inzwischen am gleichen Institut ein Wendellinearbeschleuniger gebaut [14], bei dem bei einer Frequenz von 150 MHz Elektronen von einer anfänglichen Geschwindigkeit von 0,12 c über eine Strecke von 3 m auf 0,15 c beschleunigt werden.⁺⁾ Hierbei blieben Wendelradius (2 cm) und Außenleiterradius (6 cm) über die ganze Länge des Wellenleiters konstant und die genannte Variation der Phasengeschwindigkeit wurde durch ein allmähliches Ansteigen des Windungsabstandes bewirkt. Bei der Festlegung der geometrischen Parameter wurden die gleichen Werte der Serienimpedanz zugrundegelegt, die sich auch aufgrund der hier vorliegenden Theorie ergeben. Die Erfahrungen beim Betrieb dieses Beschleunigers bestätigten innerhalb einer Meßunsicherheit von ca. 4% die Richtigkeit des angenommenen Verlaufs von ξ . Die aus dem Schichtmodell errechneten ξ -Werte liegen im Mittel um mehr als 10% über den angenommenen. Betreffs näherer Einzelheiten muß auf die zitierte Arbeit von H. KLEIN verwiesen werden.

2.4. Dämpfung.

Die Berechnung der Dämpfung läßt sich mit den bei der Ableitung der Theorie benutzten Zusammenhängen ebenfalls durchführen. Wesentlich ist dabei die Aufteilung des Gesamtstromes in die in Kapitel 1 (S. 11 ff.) beschriebenen Anteile, wobei die gegenläufigen Strombelegungen auf den sich gegenüberstehenden Oberflächenteilen zweier benachbarter Windungen dämpfend besonders stark ins Gewicht fallen. Die Berechnung aller Strombelegungen und der damit verbundenen Verluste wurde durchgeführt, wobei das Kraftlinienbild zwischen zwei Windungen näherungsweise als

⁺⁾ Dieser Beschleuniger ist als Modell eines Protonen-Beschleunigers gedacht. Der genannte Geschwindigkeitsbereich entspricht bei Protonen einem Energiebereich von ca. 7 - 10 MeV.

zweidimensionales elektrisches Feld zwischen parallelen Zylindern angesehen wurde, dessen Orthogonaltrajektorien die magnetischen Kraftlinien sind. Die Mitteilung dieser Rechnung würde hier zu weit führen. Es ergab sich für die Dämpfungslänge l_0 , die diejenige Leitungslänge angibt, nach deren Durchlaufen der anfänglich vorhandene Leistungsfluß auf den e-ten Teil abgesunken ist:

$$l_0 = \frac{k_0}{\varrho} \cdot \frac{2\pi a s \sqrt{KD}}{\gamma + k^2 \eta + k^4 \vartheta} \frac{\delta^2 + \epsilon^2}{\epsilon} \quad [\text{cm}]$$

wobei gesetzt ist

$$\gamma = s^2 \left[1 + \frac{1}{\left(\frac{\delta^2}{a^2} - 1 \right)^2} \right] + \frac{b}{a} \cdot \frac{s}{\left(\frac{\delta^2}{a^2} - 1 \right)^2}$$

$$\eta = \frac{8s^3 K}{d\pi^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{p} \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{\delta^2}{a^2} - 1} \right) + \frac{2dK^2}{\pi p}$$

$$\vartheta = \frac{K^2 s^4 (p^2 + 1)}{2\pi d p}$$

$$p = \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{s} \right)^2}$$

δ , ϵ und k sind durch (33) gegeben, k_0 ist die Vakuumwellenzahl und ϱ die äquivalente Oberflächenleitfähigkeit unter Berücksichtigung des Skineffekts.

Es stellte sich heraus, daß die hiernach berechneten Dämpfungslängen größer ausfallen als die experimentell gemessenen, jedoch wesentlich kleiner als beim Schichtmodell. Die noch vorhandene

Diskrepanz erklärt sich zwanglos aus der Oberflächenbeschaffenheit des für die Wendeln verwendeten Kupfers, das in unserem Falle weder versilbert noch poliert war. Aus der Literatur (s.z.B. [15]) ist bekannt, daß deshalb zusätzliche Verluste zu erwarten waren, deren Größenordnung durchaus im Rahmen der Diskrepanz liegt.

Die für 2. verwendeten Meßverfahren.

Vorbemerkungen.

Als Meßobjekte wurden 1,14 m lange Wendeln aus 8 mm starkem Kupferrohr mit jeweils konstantem Radius und konstanter Steigung verwendet. Die Länge der Außenleiter betrug 1,20 m. Dabei waren die Wendeln mit Hilfe straff gespannter, 0,4 mm starker Nylonfäden konzentrisch in den Außenleiter eingehängt. Der Windungsabstand wurde durch kleine, zwischen je zwei Windungen eingeklemmte Trolitulklötzchen festgelegt. Auf diese Weise konnte das Volumen des dielektrischen Materials im Verhältnis zum Gesamtvolumen so klein gehalten werden, daß sein Einfluß vernachlässigt werden konnte (Abb. 20 und 21).

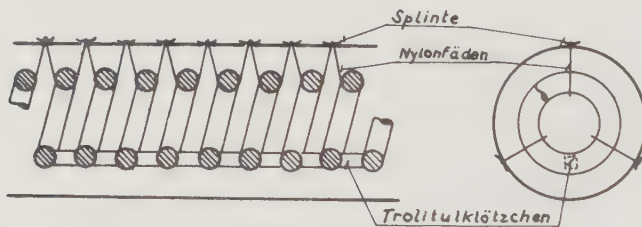


Abb. 20

Aufbau der Wendelmodelle.



Abb. 21

Einblick von vorn in ein Wendelmodell. Die in drei radialen Ebenen liegenden Nylonfäden sind gut zu erkennen.

3.1. Messung der Phasengeschwindigkeit.

Die Phasengeschwindigkeit wurde in bekannter Weise dadurch bestimmt, daß auf dem betreffenden Wendelmodell stehende Wellen

angeregt wurden, deren Wellenlänge λ dann mit Hilfe eines Störkörpers ausgemessen wurde. Hierzu wurde ein Meßsender lose kapazitiv an das eine Ende der Wendel angekoppelt, an das andere Ende wurde ein Röhrenvoltmeter angeschlossen. Über zwei Schnurlaufscheiben wurde ein endloser Nylonfaden coaxial durch die Wendel und außen herum geführt, an welchem im Innern der Wendel ein Störkörper, außen eine über einen Maßstab gleitende Marke befestigt war. Der Störkörper bestand aus einem senkrecht zur Wendelachse stehenden, kreisrunden Blättchen aus Kupferfolie, dessen Durchmesser etwas kleiner war als der Innendurchmesser der Wendel. Zur Messung wurde der Störkörper zunächst aus der Wendel herausgefahren und die Wendel durch Abstimmen des Meßsenders auf eine Resonanzfrequenz zu stehenden Wellen angeregt. Dies wurde durch ein scharfes Maximum am Röhrenvoltmeter angezeigt. Fuhr man nun den Störkörper in die Wendel hinein, so herrschte nur dann wieder annähernd Resonanz, wenn sich der Störkörper an einer feldarmen Stelle befand und damit annähernd wirkungslos blieb. Diese feldarmen Stellen, an denen sowohl die magnetische wie die elektrische Feldstärke in der Nahe der Wendelachse klein wird, liegen jeweils an den Stromknoten, also im gegenseitigen Abstand von $\lambda/2$. Der verstimmende Einfluß des Störkörpers war so stark, daß schon eine Auslenkung von ca. 2 mm aus den feldarmen Stellen einen merklichen Rückgang des Zeigerausschlages am Röhrenvoltmeter bewirkte. Da sich auch bei den niedrigsten Meßfrequenzen stets mehrere Stromknoten auf der Wendel befanden, konnte die Meßgenauigkeit durch Intervallschachtelung noch erhöht werden. Aus der verwendeten Meßfrequenz f und der gemessenen zugehörigen Wellenlänge λ errechnet sich dann die Phasengeschwindigkeit gemäß

$$v_p = \lambda \cdot f .$$

3.2. Wellenwiderstand.

Wie bereits in 2.2.2. erwähnt, ist eine direkte Messung des Wellenwiderstandes nach seiner Definition $Z = \frac{U}{I}$ bei der Wendel nicht möglich. Man kann aber aus der Verstimmung, die die

Resonanzfrequenz eines Wendelstückes unter dem Einfluß einer angeschlossenen Kapazität erfährt, aufgrund der vorliegenden Theorie auf den Wellenwiderstand schließen. Im folgenden sollen zunächst die Messung der Verstimmung und die Meßanordnung beschrieben werden. Danach wird auf den theoretischen Zusammenhang zwischen der Verstimmung und dem Wellenwiderstand näher eingegangen.

3.2.1. Messung der durch eine aufgesetzte Kapazität verursachten Verstimmung von Wendelstücken.

Die verwendete Meßapparatur ist im Blockschaltbild Abb. 22 dargestellt. Die von dem Meßsender I gelieferte Hochfrequenz-Spannung wurde lose in die als Meßobjekt dienende Wendel ein-

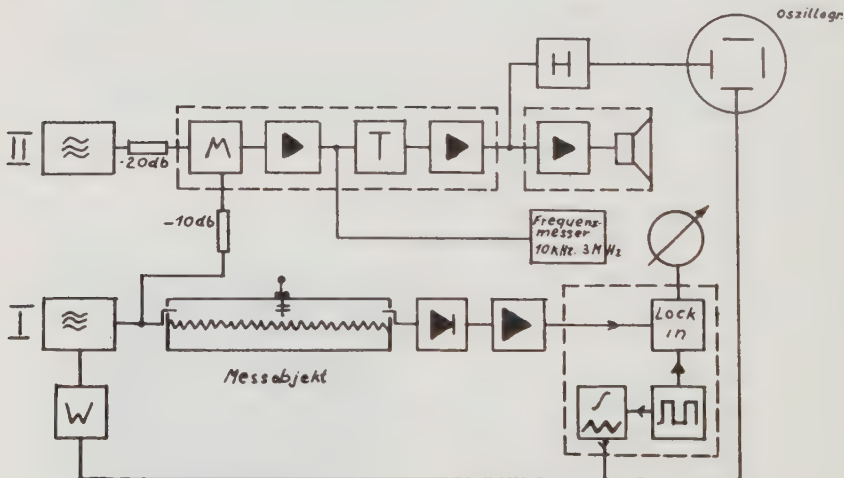


Abb. 22

Blockschaltbild zur Messung der Verstimmung.

gekoppelt, in deren Mitte mittels einer geeigneten Vorrichtung eine kleine Kapazität ($0,42 \text{ pF} \pm 5\%$) wahlweise auf die Wendel aufgesetzt oder von ihr abgehoben werden konnte. Die beiden Enden der Wendel waren jeweils durch Metalldeckel abgeschlossen und mit dem Außenleiter verbunden. Das Resonanzmaximum konnte

mit Hilfe eines am anderen Ende der Wendel ebenfalls lose angekoppelten Indikators, auf den noch näher eingegangen wird, ermittelt werden. Das Signal von Sender I wurde außerdem mit dem eines zweiten Meßsenders (II) gemischt. Die entstehende Differenzfrequenz konnte mittels eines Frequenzmessers bestimmt werden. Zur Messung wurde die Kapazität zunächst von der Wendel abgehoben, Sender I auf die Resonanzfrequenz der Wendel eingestellt und Sender II auf Schwebungsnull eingepfiffen. Nach Aufsetzen der Kapazität und Nachstimmen des Senders I auf die neue Resonanzfrequenz wurde die Differenz der beiden Resonanzfrequenzen mittels des Frequenzmessers gemessen. Wegen der relativ sehr kleinen Frequenzänderung ($10/100$) mußten noch besondere Vorkehrungen zur genauen Feststellung der Resonanzfrequenz getroffen werden, die in Abb. 22 bereits eingezeichnet sind. Hierzu wurde der Meßsender I schwach gewobbelt (Frequenzhub einige KHz). Am Ausgang des Meßobjektes erscheint dann nach Demodulation durch eine Diode eine Wechselspannung, deren Amplitude proportional $\frac{dU}{df}$ ist, wobei ein Vorzeichenwechsel von $\frac{dU}{df}$ einer Phasenumkehr der Wechselspannung entspricht. Dieses Signal wird nach hoher Verstärkung einem phasenempfindlichen Gleichrichter zugeführt, dessen Referenzsignal der Wobbelspannungsquelle entnommen wird. Auf diese Weise wird das Maximum der Resonanzkurve ($\frac{dU}{df} = 0$) durch einen Nulldurchgang des Instrumentes am phasenempfindlichen Gleichrichter angezeigt und ist mithin wesentlich schärfer zu fixieren als das Maximum selbst. Durch entsprechend hohe Verstärkung des von der Diode gelieferten Signals kann dieser Nulldurchgang im Prinzip beliebig steil gemacht werden. Indessen ist das Schwebungsnull zwischen den beiden Sendern durch die Frequenzmodulation des Senders I nicht mehr klar definiert. Da jedoch der Frequenzmesser, der hernach zur Messung der Differenzfrequenz der beiden Sender herangezogen wird, auf die mittlere Frequenz anspricht, ist es sinnvoll, das Schwebungsnull auf die mittlere Frequenz des Senders I zu beziehen. Um das so definierte Schwebungsnull ablesbar zu machen, wurde die Ausgangsspannung des Mischers M über einen Niederfrequenz-Hochpaß auf die Vertikalablenkplatten eines Oszillographen gegeben. Zur Horizontalablenkung wurde das Wobbel-signal benutzt. Auf diese Weise erhält man auf dem Schirm Figuren nach Abb. 23, wobei die Einschnürung die Lage des Schwebungsnulls anzeigt.

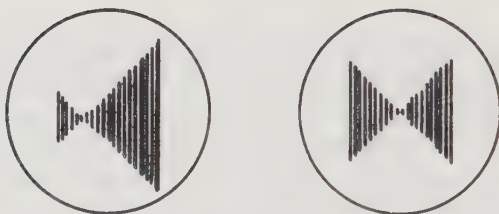


Abb. 23

Schirmbilder zur Anzeige des Schwebungsnulls.

Liegt die Einschnürung in der Mitte, so ist der Sender II auf die mittlere Frequenz des Senders I abgestimmt.

Das Photo Abb. 24 zeigt die in Abb. 22 schematisch dargestellte Meßapparatur.

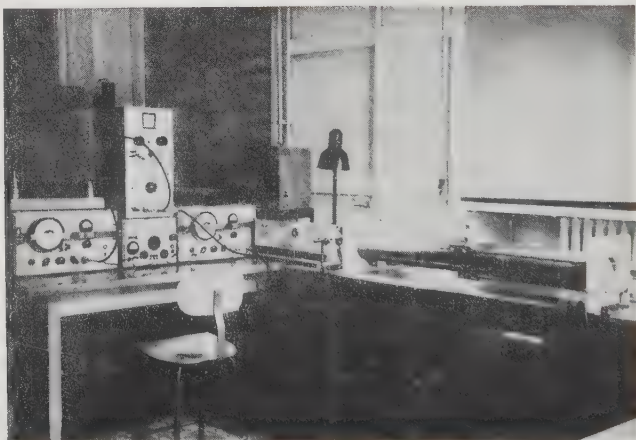


Abb. 24

Die benutzte Meßapparatur.

Ganz links im Bild steht der Meßsender II mit dem daraufgestellten 20 db Dämpfungsglied. Daneben stehen übereinander Frequenzmesser, Mischer und phasenrichtiger Gleichrichter. Rechts davon erkennt man den Meßsender I, den Oszillographen und den Wechselspannungsverstärker, neben dem sich ganz rechts im Bild das Meßobjekt befindet. In der Mitte des Meßobjektes sieht man die Schaltvorrichtung für die Kapazität, die zur Auffindung der genauen elektrischen Mitte des Meßobjektes sowohl in axialer wie in azimutaler Richtung um einen gewissen Betrag verschoben werden konnte.

Die mit dieser Apparatur erzielte Meßgenauigkeit hing naturgemäß stark von der elektrischen Güte der Meßobjekte und den zu messenden Frequenzdifferenzen ab. Sie lag im Mittel etwa bei 1%. In einigen Fällen wurden jedoch stärkere Störungen durch parasitäre Schwingungen auf dem Außenleiter beobachtet.

3.2.2. Der theoretische Zusammenhang zwischen der Verstimmung und dem Wellenwiderstand.

Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, wie man aufgrund der vorliegenden Theorie aus den gemessenen Verstimmungen auf den Wellenwiderstand $Z = \frac{U}{I}$ schließen kann: Bei einfachen Leitungen ist dieser Zusammenhang bekanntlich im Falle kleiner relativer Verstimmungen ($\Delta k \ll 1$) gegeben durch

$$\Delta k l = - \frac{\omega C Z}{2}, \quad (48)$$

wobei Δk die der Verstimmung entsprechende Änderung der Wellenzahl k ist und l die halbe Länge des Meßobjektes (d.h. also die Entfernung zwischen dem aufgesetzten Kondensator und einem der Leitungsenden nach Abb. 14). Der Faktor $\frac{1}{2}$ auf der rechten Seite rührt davon her, daß der Kondensator aus Symmetriegründen für jede Leitungshälfte nur mit der Hälfte seines Wertes wirksam ist. Die Stelle auf der Leitung, an der der Kondensator angeschlossen wird sowie auch die Leitungsenden stellen Inhomogenitäten auf der Leitung dar, die nach den Ausführungen im ersten Kapitel dieser Arbeit im Falle der Wendel im Allgemeinen das Auftreten von örtlich nichtperiodischen Störtermen der Form $a \cdot e^{-\delta x}$ zur Folge haben. Durch die Wirkung dieser Störterme ist bei der Wendel mit einem anderen Zusammenhang zu rechnen als dem oben genannten, den wir im Folgenden ableiten wollen. Wir gehen dabei von der Abb. 25 aus, in der die rechte Hälfte des Meßobjektes mit der halben abschaltbaren Kapazität dargestellt ist.

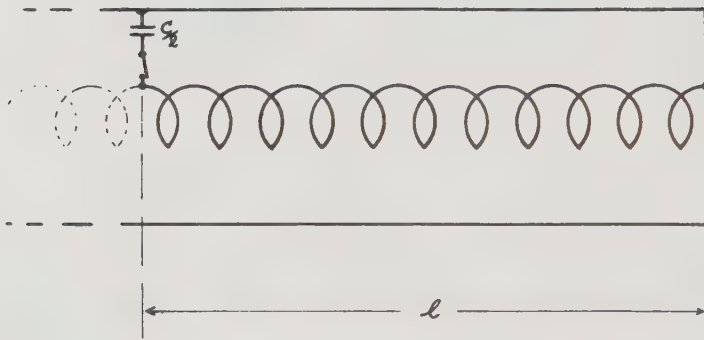


Abb. 25

Die rechte Hälfte der Schaltungsanordnung nach Abb. 14. Das rechte Ende ist durch einen Metalldeckel kurzgeschlossen.

Wir betrachten die Lage der Spannungsknoten, die sich vor jedem der Wendelenden nach Abb. 25 ausbilden, wenn eine gegen das jeweilige Ende laufende Welle dort total reflektiert wird. Die Lage der Knoten wird dargestellt durch den jeweiligen Phasenwinkel der komplexen Amplitude der stehenden Welle, die sich durch Überlagerung der periodischen Lösungen ergibt. Die Wendel gerät in Resonanz, wenn die vor dem linken Ende stehenden Knoten mit den vor dem rechten Ende stehenden zusammenfallen.

Wir berechnen zunächst die Phase der stehenden Wellen vor dem linken Ende. Dort sind die von links und rechts (d.h. von der nicht gezeichneten linken Wendelhälfte) kommenden magnetischen Flüsse aus Symmetriegründen einander entgegengesetzt gleich, so daß der resultierende Gesamtfluß Φ an dieser Stelle verschwindet. Denken wir uns den Koordinatennullpunkt an die Anschlußstelle des Kondensators gerückt, so gilt mithin gemäß (34):

$$a_1 \delta + (a_2 - a_4) \cdot j\epsilon = 0, \quad (49)$$

wobei die a_v die Teilamplituden der möglichen Schwingungsformen gemäß (29) sind. Eine zweite Randbedingung erhalten wir, wenn

wir bedenken, daß des Kondensators wegen gelten muß:

$$\frac{J(0)}{U(0)} = - \frac{j\omega C}{2} \quad , \quad (50)$$

Indem wir die beiden ersten Gleichungen (34) durcheinander dividieren, erhalten wir hieraus

$$a_1 \left[\mu - \frac{\delta(1-\delta^2)}{\varepsilon(1+\varepsilon^2)} \right] + a_2(\mu-j) + a_4(\mu+j) = 0, \quad (51)$$

wobei zur Abkürzung $\frac{\omega C Z}{2} \equiv \mu$ gesetzt ist.

Elimination von a_1 aus (49) und (51) liefert

$$\frac{a_2}{a_4} = \frac{\left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta}\mu - \frac{1-\delta^2}{1+\varepsilon^2}\right) - j\mu}{\left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta}\mu - \frac{1-\delta^2}{1+\varepsilon^2}\right) + j\mu}.$$

Wie wegen der totalen Reflexion nicht anders zu erwarten, ist $\frac{|a_2|}{|a_4|} = 1$ und wir können setzen:

$$\frac{a_2}{a_4} = e^{2j\psi} \quad (52)$$

mit

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{-\mu}{1 + \frac{\varepsilon}{\delta}\mu - \frac{1-\delta^2}{1+\varepsilon^2}}. \quad (53)$$

Nun liefert (31) allgemein für die Lage der Spannungsknoten in genügender Entfernung vom Ende (so daß man den Störterm $a_1 e^{-\delta \gamma x_1}$ vernachlässigen kann):

$$\frac{a_2}{a_4} = -e^{2jkx_1} \quad ,$$

wobei x_1 die Entfernung eines genügend weit im Innern der Wendel liegenden Spannungsknotens von der Anschlußstelle des Kondensators ist.

Der Vergleich mit (52) ergibt:

$$kx_1 + \frac{\pi}{2} = \psi + n_1\pi. \quad (54)$$

Wir betrachten nun das rechte Wendelende. Hier verschwindet der Fluß ϕ wegen des Metalldeckels, der durch die Wirkung des Skineffektes für die magnetischen Kraftlinien undurchdringlich ist. Da der Deckel das Wendelende außerdem gegen den Außenleiter kurzschließt, verschwindet dort auch die Spannung U . Aus diesen beiden Randbedingungen erhält man unter Benutzung der Gleichungen (34) auf ganz analoge Weise wie oben:

$$\frac{a_2^*}{a_4^*} = \frac{\varepsilon - j\delta}{\varepsilon + j\delta}$$

oder

$$\frac{a_2^*}{a_4^*} = e^{2j\psi^*}$$

mit

$$\tan \psi^* = -\frac{\delta}{\varepsilon}, \quad (55)$$

wobei die auf das rechte Ende bezogenen Größen mit einem Stern versehen sind. Für die Entfernung x_2 der Spannungsknoten vom rechten Wendelende gilt dann unter den gleichen Voraussetzungen wie oben

$$kx_2 + \frac{\pi}{2} = \psi^* + n_2\pi \quad (56)$$

Zur Erfüllung der Resonanzbedingung erzwingen wir das Zusammenfallen der durch (54) und (56) gegebenen Knotenstellen, indem wir setzen

$$x_1 + x_2 = l,$$

wobei l wieder die Entfernung zwischen Kondensator und Ende ist. Die Kombination dieser Beziehung mit (54) und (56) ergibt

$$kl - \psi - \psi^x = n\pi.$$

Wir erhalten die gesuchte Beziehung zwischen den kleinen Änderungen von μ (bzw. C) und kl , indem wir das totale Differential dieses Ausdrucks gleich Null setzen. Für kleine, endliche Änderungen $\Delta\mu$ und Δkl ergibt dies unter Beachtung von $k = \epsilon\gamma$:

$$\frac{\Delta\mu}{\Delta kl} = \frac{1}{\frac{\partial\psi}{\partial\mu}} - \frac{1}{\gamma l} \left[\frac{\frac{\partial\psi}{\partial\epsilon} + \frac{\partial\psi^x}{\partial\epsilon}}{\frac{\partial\psi}{\partial\mu}} \right] \quad (57)$$

Aufgrund unserer Voraussetzungen interessiert uns dieser Differentialausdruck an der Stelle $\mu = 0$. Berechnet man die rechtsstehenden Differentialquotienten aus (53) und (55) für $\mu = 0$ und setzt sie in (57) ein, so ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$\frac{\Delta\mu}{\Delta kl} = - \frac{\delta^2 + \epsilon^2 - \frac{1}{\delta\gamma l}}{1 + \epsilon^2},$$

wobei δ und ϵ wieder durch (33) gegeben sind. Der Term $\frac{-1}{\delta\gamma l}$ im Zähler, der wegen der ohnehin notwendigen Voraussetzung $\delta\gamma l \gg 1$ (vergl. S. 65) nur eine kleine Korrektur darstellt^{*)}, wurde dabei näherungsweise unter der Annahme $\frac{\epsilon'}{\epsilon} \approx \frac{dl'}{dl}$ berechnet.

*) Bei unserem Meßobjekten ... 4%.

Unter Beachtung von $\mu = \Delta\mu = \frac{\omega CZ}{2}$ lehrt ein Vergleich mit (48), daß man die Beziehung zwischen C und Δk in der Form schreiben kann:

$$\frac{\omega CZ}{2} = -\Delta k l \cdot F \quad (58)$$

mit

$$F = \frac{\delta^2 + \varepsilon^2 - \frac{1}{\delta \varepsilon}}{1 + \varepsilon^2} \quad (59)$$

Für $F = 1$ geht (58) in die bei einfachen Leitungen gültige Beziehung (48) über. Dies ist z.B. für $\gamma \rightarrow \infty$ bei endlichem k der Fall, wie man aus (33) leicht ersieht. Der Grenzübergang $\gamma \rightarrow \infty$ bedeutet aber physikalisch gemäß (15) die Entkopplung der einzelnen Windungen gegeneinander.

Bei der Umrechnung der Verstimmung $\Delta\omega$ auf $\Delta k l$ muß man noch beachten, daß gemäß

$$\Delta\omega = \frac{1}{2} \frac{d\omega}{dk} \Delta k l$$

die Gruppengeschwindigkeit $\frac{d\omega}{dk}$ eingeht, die bei der Umrechnung der gemessenen Verstimmung auf den in Abb. 14 a ... d dargestellten Wellenwiderstand durch graphische Differentiation der gemessenen Verläufe von $k(\omega)$ gewonnen wurde. Im Verein mit der erwähnten Unsicherheit von $\pm 5\%$ bei C wurde so die insgesamt auftretende Unsicherheit zu ca. $\pm 7\%$ angenommen.

3.3. Messung der Dämpfungslänge.

Die Messung der Dämpfungslänge erfolgte durch Bestimmung der Halbwertsbreite der an den Meßobjekten gemessenen Resonanzkurven. Hierzu diente eine ähnliche Apparatur wie die in 2.2.2. beschriebene, wobei jedoch die Wobbeleinrichtung fortgelassen wurde, um die Resonanzkurve selbst statt deren Differential-

quotienten zu erhalten. Statt dessen wurde zwischen Diode und Wechselspannungsverstärker (s. Abb. 22) ein vom Referenzsignal gesteuerter Zehnerzähler geschaltet. Aus der gemessenen Halbwertsbreite $\Delta \omega$ berechnet sich dann die Dämpfungslänge l_0 zu

$$l_0 = \frac{v_g}{\Delta \omega} .$$

Die hier auftretende Gruppengeschwindigkeit v_g wurde wieder durch graphische Differentiation der gemessenen Verläufe von $k(\omega)$ gewonnen.

Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß sich die Leitungsgleichungen eines abgeschirmten Wellenleiters so verallgemeinern lassen, daß damit eine Beschreibung der Vorgänge auf wendelförmigen Leitungen ermöglicht wird.

Diese Beschreibung wird erreicht durch Hinzunahme der Windungskapazität sowohl in der Kontinuitätsgleichung als auch in der Verkopplung zwischen Strom- und Kraftfluß. Experimentelle Ergebnisse führten zu der Einsicht, daß die von den einzelnen Windungen der Wendel ausgehenden Kraftflüsse so zwischen den Windungen "durchsickern" (um sich im Raum zwischen Wendel und Außenleiter zu schließen), daß der Kraftfluß vom Entstehungsort aus exponentiell abnimmt. Die Abklingkonstante ist, wie eine theoretische Analyse zeigt, u.a. durch die Windungskapazität bestimmt. Das exponentielle Abklingen des Flusses wurde experimentell vom Verfasser entdeckt. Die Deutung dieser Erscheinung im Zusammenhang mit der Windungskapazität ergab sich in sehr ausführlichen Diskussionen mit Herrn Professor Dänzer.

Die Experimente zeigen, daß eine entsprechende Erweiterung der Leitungsgleichungen die Ausbreitungsvorgänge auf wendelförmigen Wellenleitern gut beschreibt. Nach einer Schilderung der theoretischen Grundlagen wurden Experimente ausgeführt, die die Dispersionseigenschaften der Wendel und deren Wellenwiderstand betreffen. Für Wendeln mit nicht zu großer Steigung entsprechen die Ergebnisse weitgehend den Voraussagen der Theorie.

Im Hinblick auf Fragen, die den Wendellinearbeschleuniger betreffen, wurde die Dämpfung des Wellenleiters aufgrund der vorliegenden Theorie untersucht und die Beziehung zwischen Leistungsfluß und elektrischer Axialfeldstärke angegeben. Die dabei erhaltenen Ergebnisse erwiesen sich als brauchbarer als entsprechende Folgerungen aus dem Schichtmodell.

Es kann gesagt werden, daß die hier geschilderte Leitungstheorie zur Gewinnung konstruktiver Unterlagen eines Wendellinearbeschleunigers geeignet erscheint.

Ich danke der Deutschen Forschungsgemeinschaft dafür, daß sie die personellen und sachlichen Mittel zur Durchführung dieser Arbeit zur Verfügung stellte. Mein Dank gilt ferner Herrn Horst Klein für seine wertvollen Diskussionsbeiträge sowie Herrn Helmut Bütow für seine freundliche Hilfe bei der Anfertigung der Zeichnungen.

Insbesondere aber danke ich meinem Doktorvater, Herrn Professor Dr. H. Dänzer, für zahlreiche, sehr wertvolle Anregungen und Diskussionsbeiträge.

Lebenslauf des Verfassers.

Am 17.12.1928 wurde ich, Helmut Joachim Herminghaus, als Sohn des Kaufmanns Werner Herminghaus und seiner Ehefrau Liselotte, geb. Raab, in Wiesbaden geboren. Nach dem Besuch der Volksschule trat ich Ostern 1939 in das Humanistische Gymnasium in Wiesbaden ein, von dem ich nach kriegsbedingter Unterbrechung des Unterrichts im Sommer 1948 auf das städtische Realgymnasium am Zietenring überwechselte. Dort bestand ich Ostern 1951 die Reifeprüfung. Anschließend begann ich an der Johann-Wolfgang-Goethe Universität in Frankfurt am Main mit dem Physikstudium und legte am 11.5.1954 die Diplomvorprüfung ab. Unter Anleitung von Herrn Professor Dr. H. Dänzer fertigte ich dann als Stipendiat der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Institut für angewandte Physik eine Diplomarbeit über "Hochfrequenzeigenschaften abgeschirmter Wendelleitungen im Hinblick auf den Bau eines Wendellinearbeschleunigers" an und bestand am 28.2.1959 die Diplomhauptprüfung für Physiker. Anschließend begann ich - ebenfalls unter Leitung von Herrn Professor Dr. Dänzer - im Rahmen eines Forschungsauftrages der Deutschen Forschungsgemeinschaft an der vorliegenden Dissertation zu arbeiten.

